Mécanique 1 – Cinématique du point

La mécanique est la science de l'étude du **mouvement** des corps. Elle se décompose en deux parties :

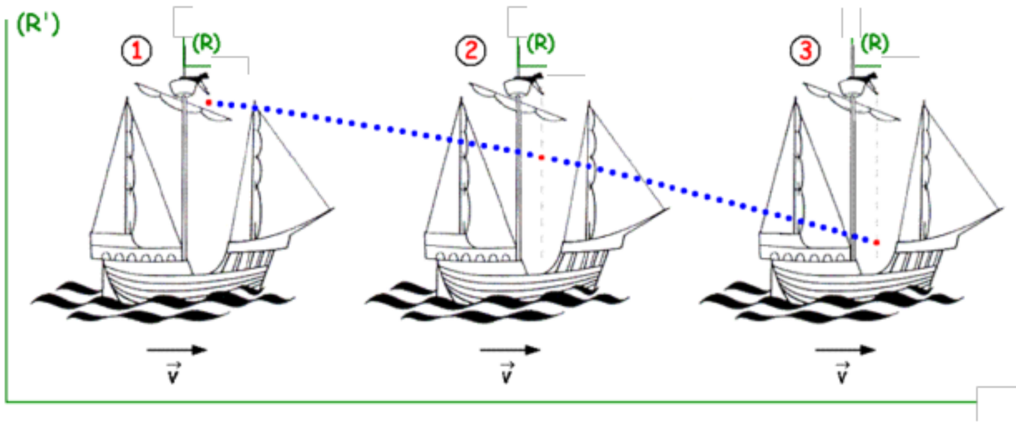
- La cinématique désigne l'ensemble des outils nécessaires pour **décrire le mouvement** *indépendamment des causes qui l'ont produit*.
- La dynamique désigne l'ensemble des lois permettant d'étudier les **causes du mouvement** observé.

Il est important de bien distinguer ces deux étapes dans les études mécaniques. Elles sont aussi essentielles l'une que l'autre. Dans ce premier chapitre, on ne se soucie donc que de décrire le mouvement d'un système sans se soucier des causes de ce mouvement.

1. Généralités sur l'étude d'un mouvement

1.1. Repères de temps et d'espace - Référentiels

Il est important de garder à l'esprit qu'un **mouvement est toujours relatif** : il se définit par rapport à un référentiel donné qui permet de définir l'immobilité. Prenons l'exemple suivant : on lâche un objet sans vitesse initiale depuis la vigie d'un navire en translation. Quel est son mouvement ? Tout dépend du référentiel !



L'expérience montre que la chute de l'objet se fera parallèlement au mat (on néglige les frottements de l'air) : dans le référentiel (R) du navire la trajectoire est donc verticale ; dans le référentiel terrestre (R') il en sera différemment : l'objet se déplace également suivant un mouvement horizontal, accompagnant celui du navire.

Pour définir un référentiel on doit disposer de deux choses :

- Un repère d'espace
- Un repère de temps

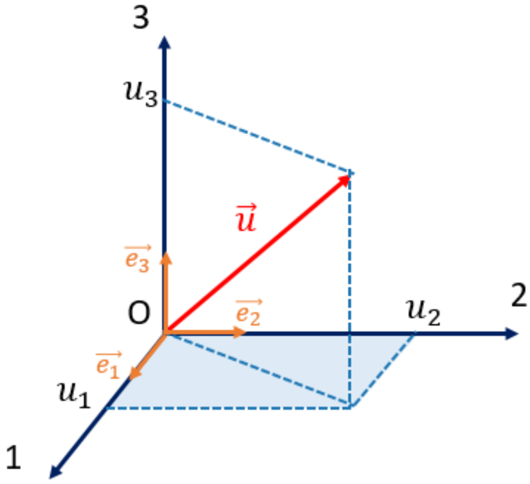
Repère d'espace

DEFINITION

Un **repère d'espace** est constitué d'une origine, souvent notée O, et d'une base orthonormée directe $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$.

- Une **base vectorielle** est un ensemble de vecteurs non coplanaires, notés ici $\vec{e_1}, \vec{e_2}$ et $\vec{e_3}$;
- **Orthogonale** : si les vecteurs $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ sont orthogonaux deux à deux ;
- **Normée** : $\|\vec{e_1}\| = \|\vec{e_2}\| = \|\vec{e_3}\| = 1$;
- **Orthonormée** = orthogonale + normée
- **Directe** : $\vec{e_3} = \vec{e_1} \wedge \vec{e_2}$

QUELQUES RAPPELS DE MATHEMATIQUES (A BIEN CONNAÎTRE !)



Un vecteur $\vec{u}$ est défini par ses trois coordonnées (u_1, u_2, u_3) définies de manière unique la base $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ étant donnée :

$$\vec{u} = u_1\vec{e_1} + u_2\vec{e_2} + u_3\vec{e_3}$$

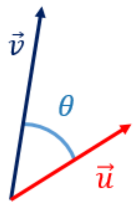
Pour simplifier, on utilise souvent la notation colonne :

$$\vec{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}$$

- La **norme** d'un vecteur correspond à sa longueur, on peut la déduire simplement à partir du théorème de Pythagore :

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{{u_1}^2 + {u_2}^2 + {u_3}^2}$$

- Le **produit scalaire** de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ formant entre eux un angle θ vaut :

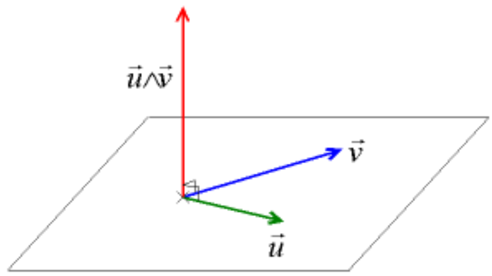


$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos\theta$$

Dans une base orthonormée on peut facilement montrer que :

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3$$

- Le **produit vectoriel** de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ formant entre eux un angle θ s'écrit :

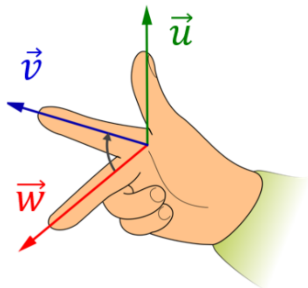


$$\vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{v}$$

Avec :

$$\|\vec{w}\| = \|\vec{u}\| \, \|\vec{v}\| \sin\theta$$

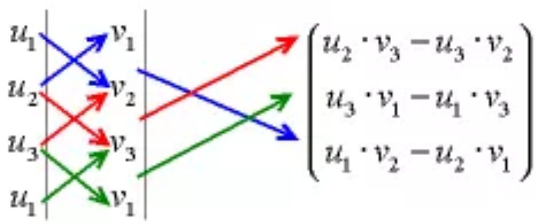
Et la direction de $\vec{w}$ est perpendiculaire au plan formé par $\vec{u}$ et $\vec{v}$, orientée selon la règle des trois doigts de la **main droite** (ne pas se tromper !!)



Remarque : Le produit vectoriel de deux vecteurs colinéaires est nul par définition.

Dans une base orthonormée on a :

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_2v_3 - u_3v_2 \\ u_3v_1 - u_1v_3 \\ u_1v_2 - u_2v_1 \end{bmatrix}$$



Repère de temps

> **DEFINITION**
>
> Un **repère de temps** est constitué d'une origine t_0 et d'une horloge mesurant l'écoulement du temps. En mécanique classique (newtonienne), le temps est absolu, indépendant du référentiel d'étude.

Remarque :
L'idée d'un temps absolu est une notion très intuitive : il nous paraît normal que le temps s'écoule de la même manière pour tout le monde ! Cependant en 1905 Albert Einstein a exposé dans un article la théorie de la mécanique relativiste. Son objectif était de définir une nouvelle théorie de la mécanique qui soit compatible avec la théorie de l'électromagnétisme de Maxwell. Dans cette théorie, les durées mesurées entre deux évènements dépendent de l'observateur considéré ! Mais en mécanique newtonienne, ou mécanique classique, nous négligeons les effets relativistes qui n'apparaissent que pour des vitesses extrêmement élevées (physique des particules par exemple).

Référentiel

> **DEFINITION**
>
> Un **référentiel** est la donnée d'un repère de temps et d'un repère d'espace. On le note généralement $\mathcal{R}$.

Tout problème de mécanique commence par le choix d'un référentiel d'étude. Quelques exemples de référentiels usuels :

- **Référentiel héliocentrique** : référentiel lié au centre du soleil et dont les axes sont dirigés vers trois étoiles suffisamment éloignées pour être supposées fixes.
- **Référentiel géocentrique** : référentiel lié au centre de la Terre et en translation par rapport au référentiel héliocentrique.
- **Référentiel terrestre (référentiel du laboratoire)** : référentiel lié à la Terre, il est attaché au sol et donc en rotation par rapport au référentiel géocentrique.

1.2. Système

Dans un problème de mécanique, une fois défini le référentiel, il est nécessaire de définir le **système** étudié. En mécanique du point, nous nous intéresserons uniquement au mouvement du centre de gravité du système sans étudier son éventuel mouvement de rotation (cela sera étudié en mécanique du solide).

Dans la suite le point matériel sera noté M. Le but de la mécanique est de repérer la position du point M et d'en décrire le mouvement.

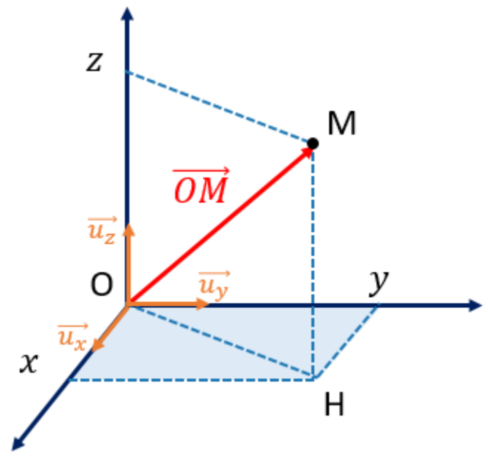
2. Etude d'un système en coordonnées cartésiennes

2.1. Vecteur position

Une base cartésienne de l'espace tridimensionnel est une base orthonormée directe fixe par rapport au référentiel. Le repère cartésien est défini par un point d'origine O et une base orthonormée directe $(\overrightarrow{u_x}, \overrightarrow{u_y}, \overrightarrow{u_z})$ de directions constantes dans le référentiel $(\mathcal{R})$.

Le vecteur position du point M s'écrit alors :

$$\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{u_x} + y\overrightarrow{u_y} + z\overrightarrow{u_z}$$



POINT MATHS

Le vecteur $\overrightarrow{OH}$ s'appelle la **projection** de $\overrightarrow{OM}$ dans le plan (Oxy).

Le vecteur $x\overrightarrow{u_x}$ est la projection de $\overrightarrow{OM}$ sur le vecteur $\overrightarrow{u_x}$; pour obtenir x, et plus généralement **pour projeter un vecteur sur un vecteur unitaire on réalise un produit scalaire** :

$$x = \overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{u_x}$$

Equations horaires et trajectoire

Prenons l'exemple d'une voiture partant d'un point (on assimile la voiture à son centre de gravité) de coordonnées (x_0, y_0, z_0) et avançant dans le référentiel terrestre à une vitesse v_0 = 100 km/h en ligne droite, et choisissons l'axe Ox suivant cette ligne. Les **équations horaires** correspondent aux équations mathématiques permettant d'obtenir les coordonnées de M **au cours du temps** dans le référentiel d'étude. Dans ce cas, les équations horaires de son mouvement sont les suivantes :

$$\begin{cases} x(t) = x_0 + v_0 t \\ y(t) = y_0 \\ z(t) = z_0 \end{cases}$$

La **trajectoire** d'un point M (le centre de gravité de la voiture) est la courbe de l'ensemble de ses positions au cours du temps. **Cela revient à éliminer le temps dans les équations horaires.**

ATTENTION

Ne pas confondre équations horaires et trajectoire !

A VOUS DE JOUER

Cas de la voiture

1. Dessiner l'allure de x(t), position au cours du temps.

2. Dessiner l'allure de la trajectoire dans un plan pertinent et proposer une équation de cette trajectoire.

Cas d'un lancer de balle

Une balle est lancée d'une hauteur h avec une vitesse initiale purement horizontale $\overrightarrow{v_0} = v_0\overrightarrow{u_x}$. On peut montrer que, dans la base cartésienne adaptée, les équations horaires de la balle s'écrivent :

$$\begin{cases} x(t) = v_0 t \\ y(t) = 0 \\ z(t) = -\dfrac{1}{2}gt^2 + h \end{cases}$$

Avec g = 9,81 m.s^{-2} l'accélération de la pesanteur.

3. Obtenir l'équation de la trajectoire de la balle.

4. Dessiner l'allure de la trajectoire dans un plan pertinent.

2.2. Déplacement infinitésimal

Le déplacement infinitésimal d'un point représente le déplacement, fictif ou non, du point M étudié entre deux instants t et t + dt infiniment proches.

DEFINITION

Le **déplacement infinitésimal** $d\overrightarrow{OM}$ d'un point M entre les instants t et t+dt s'exprime comme suit :

$$d\overrightarrow{OM} = \lim_{dt \to 0} \left(\overrightarrow{OM}(t + dt) - \overrightarrow{OM}(t) \right)$$

La norme $\left\| d\overrightarrow{OM} \right\|$ est homogène à une longueur. En coordonnées cartésiennes, le déplacement infinitésimal s'écrit :

$$d\overrightarrow{OM} = dx\overrightarrow{u_x} + dy\overrightarrow{u_y} + dz\overrightarrow{u_z}$$

A VOUS DE JOUER

Déterminer le mouvement infinitésimal $d\overrightarrow{OM}$ dans les exercices précédents de la voiture et du lancer de balle.

2.3. Vecteur vitesse

On appelle vitesse du point relativement au référentiel $\mathcal{R}$ le vecteur exprimant le changement de position du point M au cours du temps par rapport à l'origine O.

DEFINITION

Le **vecteur vitesse** d'un point M dans son mouvement relativement au référentiel $\mathcal{R}$ est la dérivée de son vecteur position :

$$\vec{v}_{M/\mathcal{R}} = \left(\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \right)_{\mathcal{R}}$$

En coordonnées cartésiennes, les vecteurs unitaires sont fixes, donc le vecteur vitesse s'exprime comme suit :

$$\vec{v}_{M/\mathcal{R}} = \frac{dx}{dt}\overrightarrow{u_x} + \frac{dy}{dt}\overrightarrow{u_y} + \frac{dz}{dt}\overrightarrow{u_z}$$

On utilise souvent la notation simplifiée suivante :

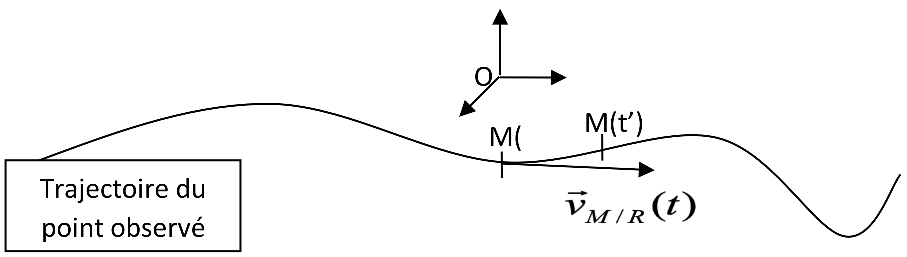
$$\vec{v}_{M/\mathcal{R}} = \dot{x}\overrightarrow{u_x} + \dot{y}\overrightarrow{u_y} + \dot{z}\overrightarrow{u_z}$$

A VOUS DE JOUER

Déterminer le vecteur vitesse de la voiture et de la balle dans les exemples précédents.

REMARQUE IMPORTANTE

Le vecteur vitesse est toujours tangent à la trajectoire au point M. Ceci est une conséquence mathématique de la notion de dérivée.



2.4. Vecteur accélération

On appelle accélération du point M relativement au référentiel $\mathcal{R}$ le vecteur exprimant la manière dont varie son vecteur vitesse.

DEFINITION

Le **vecteur accélération** d'un point M dans son mouvement relativement au référentiel $\mathcal{R}$ est la dérivée de son vecteur position :

$$\vec{a}_{M/\mathcal{R}} = \left(\frac{d\vec{v}_{M/\mathcal{R}}}{dt}\right)_{\mathcal{R}} = \left(\frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2}\right)_{\mathcal{R}}$$

En coordonnées cartésiennes le vecteur accélération s'exprime comme suit :

$$\vec{a}_{M/\mathcal{R}} = \frac{d^2x}{dt^2}\overrightarrow{u_x} + \frac{d^2y}{dt^2}\overrightarrow{u_y} + \frac{d^2z}{dt^2}\overrightarrow{u_z}$$

Ou en notation simplifiée :

$$\vec{a}_{M/\mathcal{R}} = \ddot{x}\overrightarrow{u_x} + \ddot{y}\overrightarrow{u_y} + \ddot{z}\overrightarrow{u_z}$$

A VOUS DE JOUER

Déterminer le vecteur accélération de la voiture et de la balle dans les exemples précédents.

2.5. Quelques exemples

- **Mouvement uniforme**

  Les mouvement d'un point est dit uniforme lorsque la norme de son vecteur vitesse est constante :

  $$\left\|\vec{v}_{M/\mathcal{R}}\right\| = cste$$

  Dans les exemples précédents, le mouvement de la voiture est un mouvement uniforme de vitesse v_0.

ATTENTION

Un mouvement uniforme implique que la norme du vecteur vitesse soit constante, mais sa direction (et donc le vecteur vitesse lui-même) ne l'est pas nécessairement !

- **Mouvement uniformément accéléré**

  Le mouvement d'un point M est dit uniformément accéléré lorsque la norme de son accélération est constante :

  $$\left\|\vec{a}_{M/\mathcal{R}}\right\| = cste$$

  Dans les exemples précédents, le mouvement de la balle est uniformément accéléré : $\left\|\vec{a}_{M/\mathcal{R}}\right\| = g$.

- **Mouvement rectiligne**

  Le mouvement d'un point M est dit **rectiligne** lorsque la **direction** du vecteur vitesse est constante au cours du temps. La trajectoire du point est une droite.

  Dans le cas précédent de la voiture, on peut donc dire que le mouvement est **rectiligne uniforme**.

- **Mouvement circulaire**

  Le mouvement d'un point M est dit **circulaire** lorsque sa trajectoire est un cercle ou un arc de cercle. Le rayon R de la trajectoire est alors **constant**. Le mouvement est dit **circulaire uniforme** lorsqu'il est circulaire et qu'en plus la norme du vecteur vitesse est constante.

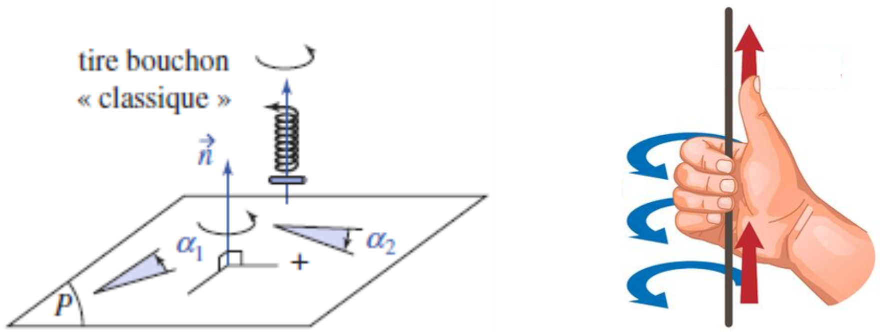
  Nous verrons que le système de coordonnées polaires (en 2D) ou cylindrique (en 3D) est plus adapté pour l'étude de ce type de mouvement.

3. Etude d'un système en coordonnées polaires et cylindriques

3.1. Vecteur position

Angle dans un plan

La mesure d'un angle dans un plan dépend du sens positif de rotation choisi. En géométrie plane, il est possible de définir un sens positif conventionnel (le sens trigonométrique) mais dans l'espace le sens trigonométrique change selon que l'observateur est en-dessous ou au-dessus du plan dans lequel on mesure les angles ! Il est donc nécessaire de définir la direction normale du plan : pour cela on l'oriente par un vecteur unitaire $\vec{n}$. Un tire-bouchon usuel qui progresse dans le sens de $\vec{n}$ tourne dans le sens positif (**attention : à faire avec la main droite !!**).

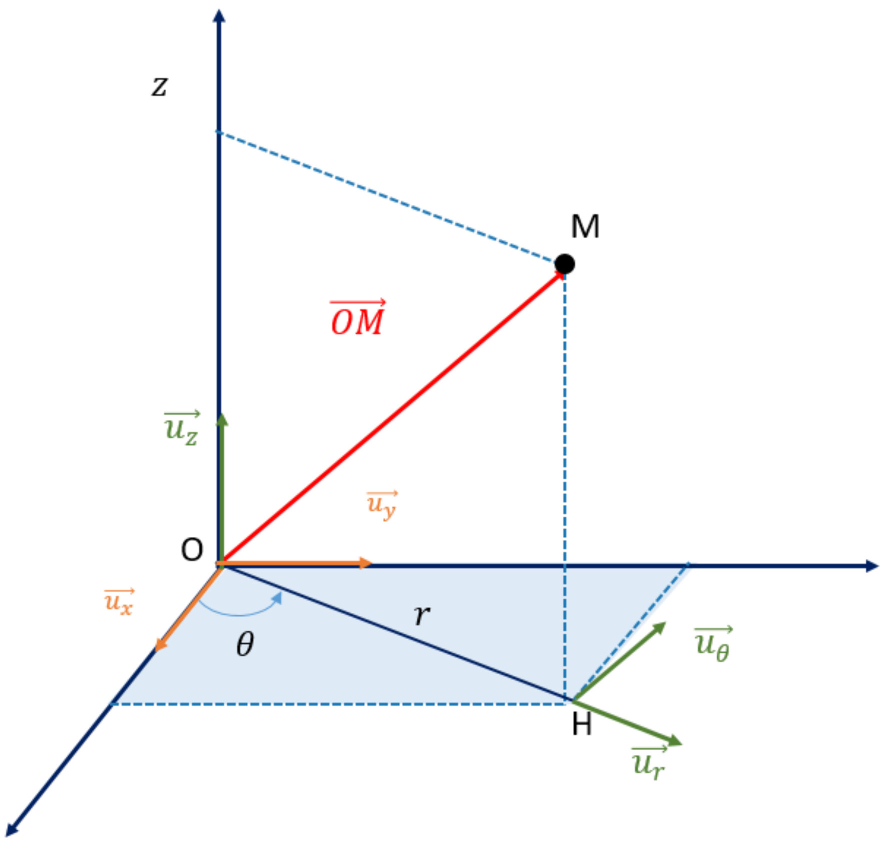


Orientation des angles de P : $\alpha_1 > 0$ et $\alpha_2 < 0$

Repérage d'un point

Soit un repère cartésien $(O;\ \overrightarrow{u_x}, \overrightarrow{u_y}, \overrightarrow{u_z})$. H étant la projection orthogonale de M sur le plan (Oxy) les coordonnées cylindriques (r, θ, z) du point M sont définies par :

- r : distance OH (r>0)
- θ : angle $(\overrightarrow{u_x}, \overrightarrow{\mathrm{OH}})$ le sens positif de θ étant défini par $\overrightarrow{u_z}$
- z : même coordonnée que dans le système cartésien



Base locale

La base locale $(\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_\theta}, \overrightarrow{u_z})$ liée au point M est définie par :

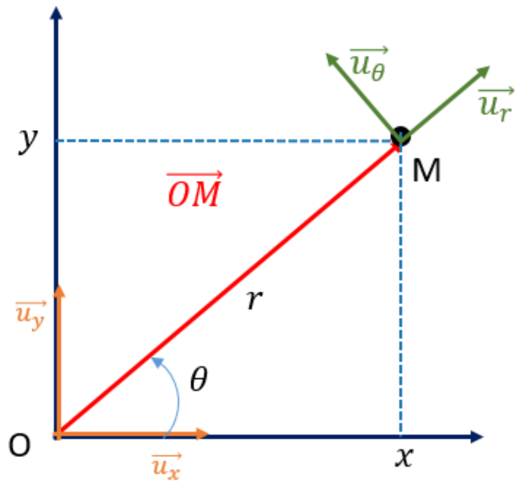
- $\overrightarrow{u_r}$ tel que $\overrightarrow{\mathrm{OH}} = r\overrightarrow{u_r}$, parallèle à (xOy)
- $\overrightarrow{u_\theta} = \overrightarrow{u_z} \wedge \overrightarrow{u_r}$, parallèle à (xOy) et pointant dans le sens de θ croissant

Cette base est locale car elle varie avec la position de M, qui peut s'écrire :

$$\boxed{\overrightarrow{OM} = r\overrightarrow{u_r} + z\overrightarrow{u_z}}$$

Coordonnées polaires (repérage en 2D)

Lorsque le point M se déplace dans un plan (Oxy) il est possible d'utiliser les coordonnées cartésiennes (x,y) ou les coordonnées polaires (r, θ) pour repérer les positions.



On peut facilement passer d'un système à l'autre. Pour obtenir les coordonnées x et y on sait qu'il faut projeter le vecteur $\overrightarrow{OM}$ sur les vecteurs de la base cartésienne :

$$\begin{cases} x = \overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{u_x} = & \|\overrightarrow{OM}\| \times \|\overrightarrow{u_x}\| \times \cos\theta & = r\cos\theta \\ y = \overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{u_y} = & \|\overrightarrow{OM}\| \times \|\overrightarrow{u_y}\| \times \cos(\frac{\pi}{2} - \theta) & = r\sin\theta \end{cases}$$

Ces relations découlent également des lois de la trigonométrie des triangles équilatéraux.

Inversement, on peut passer du système cartésien au système polaire :

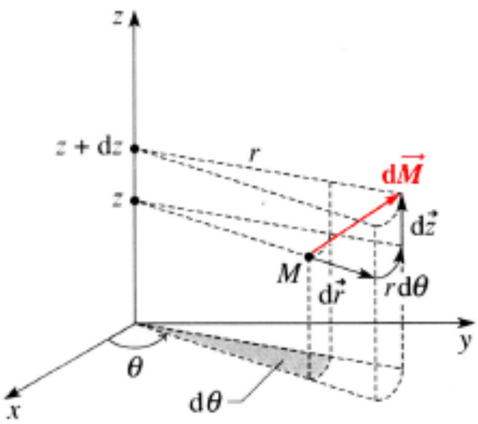
$$\begin{cases} r = & \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta = & \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) \end{cases}$$

3.2. Déplacement infinitésimal

Une petite variation le long de $\overrightarrow{u_r}$ se traduit par une distance infinitésimale dr, une petite variation le long de $\overrightarrow{u_\theta}$ se traduit par une distance infinitésimale $rd\theta$ et enfin une petite variation le long de $\overrightarrow{u_z}$ se traduit par une distance infinitésimale dz.

En coordonnées cylindriques, le déplacement infinitésimal s'écrit :

$$\boxed{d\overrightarrow{OM} = dr\overrightarrow{u_r} + rd\theta\overrightarrow{u_\theta} + dz\overrightarrow{u_z}}$$



3.3. Vecteur vitesse

ATTENTION

Dans le système de coordonnées cylindriques, les vecteurs de base $\overrightarrow{u_r}$ et $\overrightarrow{u_\theta}$ sont mobiles. Lorsqu'on dérivera des vecteurs en coordonnées cylindriques **il ne faudra pas oublier de dériver ces vecteurs** !

Leur norme ne pouvant pas changer, il faut juste considérer leur changement de direction et donc les dériver par rapport à l'angle θ.

Dérivée de $\overrightarrow{u_r}$ et $\overrightarrow{u_\theta}$ par rapport à θ

Pour dériver ces vecteurs de base, on doit repasser par la base cartésienne, et donc projeter ces vecteurs sur $\overrightarrow{u_x}$ et $\overrightarrow{u_y}$ (car $\overrightarrow{u_r}$ et $\overrightarrow{u_\theta}$ sont dans le plan xOy) :

- $\overrightarrow{u_r} = \cos\theta\,\overrightarrow{u_x} + \sin\theta\,\overrightarrow{u_y}$ ce qui donne $\left(\frac{d\overrightarrow{u_r}}{d\theta}\right)_{\mathcal{R}} = -\sin\theta\,\overrightarrow{u_x} + \cos\theta\,\overrightarrow{u_y}$
- $\overrightarrow{u_\theta} = -\sin\theta\,\overrightarrow{u_x} + \cos\theta\,\overrightarrow{u_y}$ ce qui donne $\left(\frac{d\overrightarrow{u_\theta}}{d\theta}\right)_{\mathcal{R}} = -\cos\theta\,\overrightarrow{u_x} - \sin\theta\,\overrightarrow{u_y}$

On a donc :

$$\left(\frac{d\overrightarrow{u_r}}{d\theta}\right)_{\mathcal{R}} = \overrightarrow{u_\theta}$$

et

$$\left(\frac{d\overrightarrow{u_\theta}}{d\theta}\right)_{\mathcal{R}} = -\overrightarrow{u_r}$$

Expression du vecteur vitesse

On peut maintenant dériver le vecteur position pour obtenir le vecteur vitesse :

$$\vec{v}_{M/\mathcal{R}} = \left(\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right)_{\mathcal{R}} = \frac{d}{dt}(r\overrightarrow{u_r} + z\overrightarrow{u_z}) = \frac{dr}{dt}\overrightarrow{u_r} + r\frac{d\overrightarrow{u_r}}{dt} + \frac{dz}{dt}\overrightarrow{u_z}$$

Avec :

$$\frac{d\overrightarrow{u_r}}{dt} = \frac{d\overrightarrow{u_r}}{d\theta}\cdot\frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta}\overrightarrow{u_\theta}$$

On a donc finalement :

$$\vec{v}_{M/\mathcal{R}} = \dot{r}\overrightarrow{u_r} + r\dot{\theta}\overrightarrow{u_\theta} + \dot{z}\overrightarrow{u_z}$$

A VOUS DE JOUER

Montrer que l'on peut retrouver cette expression à partir du déplacement infinitésimal

3.4. Vecteur accélération

Le vecteur accélération s'obtient en dérivant le vecteur vitesse par rapport au temps :

$$\vec{a}_{M/\mathcal{R}} = \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right)\overrightarrow{u_r} + \left(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}\right)\overrightarrow{u_\theta} + \ddot{r}\overrightarrow{u_z}$$

A VOUS DE JOUER

Démontrer l'expression précédente.

3.5. Application à un mouvement circulaire plan

Considérons une balle attachée à un fil que l'on fait tourner autour d'un point fixe noté O (on prendra se point comme origine du repère d'espace). Le mouvement est alors circulaire, et plan (on choisit les axes de telle manière que le mouvement se fait dans le plan xOy). On note l la longueur du fil.

A VOUS DE JOUER

1. Expliquer pourquoi la base cylindrique est la plus adaptée pour étudier ce mouvement.

2. Dans le cas d'un problème en 2D, comment appelle-t-on cette base ? Faire un schéma.

3. Exprimer le vecteur vitesse de la balle.

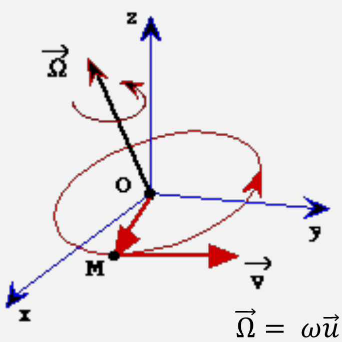
On suppose maintenant que le mouvement est uniforme.

4. Que peut-on dire de $\dot{\theta}$?

5. Donner la nouvelle expression de l'accélération et l'exprimer en fonction de l et $\omega = \dot{\theta}$, puis en fonction de v et l.

6. Quel est le sens du vecteur accélération ? Faire une représentation graphique.

DEFINITIONS



La **vitesse angulaire de rotation** ω d'un point M dans son mouvement relativement au référentiel $\mathcal{R}$ est la dérivée de sa position angulaire θ :

$$\omega = \dot{\theta} \text{ (en rad. s}^{-1}\text{)}$$

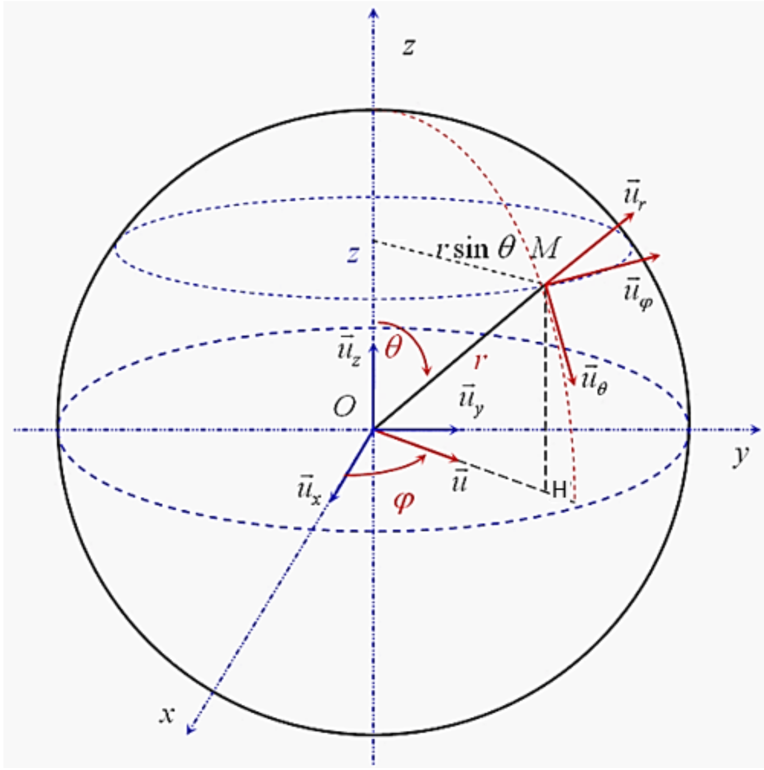
Le **vecteur rotation** $\vec{\Omega}$ permet de définir le plan et l'orientation de la position angulaire θ :

$\vec{\Omega} = \omega\vec{u}$ où $\vec{u}$ est le vecteur unitaire définissant l'axe de rotation.

4.1. Vecteur position

Le repérage en coordonnées sphériques est moins fréquent que les deux précédents mais peut néanmoins se révéler utile dans certains cas. La base locale $(\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_\theta}, \overrightarrow{u_\varphi})$ est définie par :

- $\overrightarrow{OM} = r\overrightarrow{u_r}$ avec $r \geq 0$
- $\overrightarrow{u_\varphi} = \frac{\overrightarrow{u_z} \wedge \overrightarrow{OH}}{OH}$
- $\overrightarrow{u_\theta} = \overrightarrow{u_\varphi} \wedge \overrightarrow{u_r}$



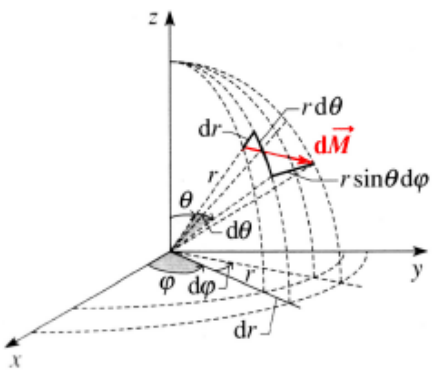
Les coordonnées sphériques $(\mathrm{r}, \theta, \varphi)$ sont par définition :

- $r = OM$
- θ : angle $(\overrightarrow{u_z}, \overrightarrow{u_r})$ orienté par $\overrightarrow{u_\varphi}$ variant de 0 à π
- φ : angle $(\overrightarrow{u_x}, \overrightarrow{\mathrm{OH}})$ orienté par $\overrightarrow{u_z}$ variant de 0 à 2π

Le vecteur position est donc simplement défini comme suit :

$$\boxed{\overrightarrow{OM} = r\overrightarrow{u_r}}$$

4.2. Déplacement infinitésimal



Une petite variation le long de $\overrightarrow{u_r}$ se traduit par une distance infinitésimale dr, une petite variation le long de $\overrightarrow{u_\varphi}$se traduit par une distance infinitésimale r$d\theta$ et enfin une petite variation le long de $\overrightarrow{u_\theta}$ se traduit par une distance infinitésimale rsinθdθ.

En coordonnées sphériques, le déplacement infinitésimal s'écrit :

$$\boxed{d\overrightarrow{OM} = dr\overrightarrow{u_r} + rd\theta\overrightarrow{u_\theta} + r\sin\theta\,\overrightarrow{u_\varphi}}$$

4.3. Vecteur vitesse

Le calcul du vecteur vitesse en coordonnées sphériques est compliqué … bonne nouvelle : il est hors programme ! L'expression pourra cependant être indiqué dans un exercice pour l'utiliser, nous l'indiquons à titre indicatif :

$$\vec{v}_{M/\mathcal{R}} = \dot{r}\,\vec{u}_r + r\,\dot{\theta}\,\vec{u}_\theta + r\,\dot{\varphi}\sin\theta\;\vec{u}_\varphi$$

4.4. Vecteur accélération

Le vecteur accélération en coordonnées sphériques n'est pas à connaître non plus, on le donne à titre indicatif :

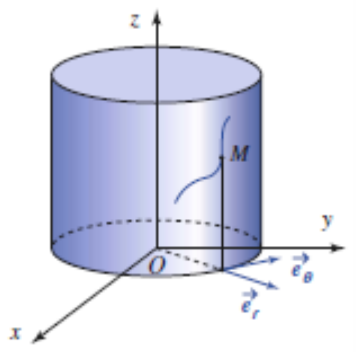
$$\vec{a}_{M/\mathcal{R}} = (\ddot{r} - r\,\dot{\theta}^2 - r\,\dot{\varphi}^2\sin\theta^2)\vec{u}_r + (2\,\dot{r}\,\dot{\theta} + r\,\ddot{\theta} - r\,\dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\theta)\vec{u}_\theta$$
$$+ (2\,\dot{r}\,\dot{\varphi}\sin\theta + 2\,r\,\dot{\theta}\dot{\varphi}\cos\theta + r\,\ddot{\varphi}\sin\theta\,)\,\vec{u}_\varphi$$

5. Comment choisir le bon système de coordonnées ?

Un problème bien posé est un problème à moitié résolu ! En mécanique, un choix judicieux du système de coordonnées permet de fortement simplifier les calculs. En général, ce choix sera guidé par la symétrie du problème.

- Si le mouvement se fait dans un plan, on pourra utiliser 2 axes x et y et repérer ainsi le point M étudié. Cela est conseillé en l'absence de toute symétrie visible.
- Toutefois, si le mouvement de M est circulaire, il y a un axe de symétrie qui est l'axe de rotation. L'utilisation de x et y sera compliquée : il vaudra mieux repérer le point par sa distance depuis le centre O (rayon r), et l'angle parcouru.
- Pour un mouvement à trois dimensions sur la Terre, il est usuel (et plus simple !) de repérer un point par sa latitude, sa longitude et son altitude : donc le système sphérique.

Prenons le cas suivant, le point M se déplaçant à la surface d'un cylindre à base circulaire :



Pour repérer sa position, nous pouvons utiliser des coordonnées cartésiennes. Le bon sens nous indique qu'il est préférable de choisir l'axe du cylindre comme axe (Oz) des coordonnées cartésiennes, le mouvement en projection dans le plan (xOy) se réduisant alors à un simple cercle. Lorsque le point se déplace, si nous souhaitons exprimer sa vitesse ou son accélération nous devons tenir compte des variations de trois coordonnées x, y, z au cours du temps : cela peut être un peu long, mais néanmoins faisable …

Utilisons maintenant un repérage en coordonnées cylindriques (r, θ, z) de ce mouvement. La coordonnée r est alors très simple : r est une constante égale au rayon du cylindre. Seules les variables z et θ sont encore susceptibles de varier : le calcul de la vitesse et de l'accélération sera écourté.

Nous pouvons aussi employer les coordonnées sphériques pour repérer ce mouvement, mais il est bien évident que cela n'apporte ici aucune simplification : bien au contraire !