Chapitre : Calcul différentiel (2)

Pour une meilleure compréhension, le plan de l'ensemble du chapitre :

A. Fonctions numériques (de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$)

I. Fonctions de classe C^1 (On se contente ici de généraliser ce qui a été vu pour n=2 ou n=3 à n quelconque)

L'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ est muni d'une norme, notée $\|.\|$ et $B=(e_1,\ldots,e_n)$ désigne la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

1) Dérivée selon un vecteur

Soit Ω un ouvert non vide de $\mathbb{R}^n$

Soit a$\in$ Ω et h un vecteur fixé de $\mathbb{R}^n$ (*attention h n'est pas a priori un scalaire*)

On pose alors $\varphi_h(t) = f(a+th)$

On dit que f est dérivable en a selon le vecteur h, lorsque φ_h est dérivable à l'origine.

On pose alors : $D_h f(a) = \varphi_h{}'(0) = \lim\limits_{t \to 0} \frac{f(a+th)-f(a)}{t}$

Ce vecteur est appelé la dérivée de f en le point a selon le vecteur h.

Etude d'un exercice

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par : $f(x,y)=xy^2$

Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$

Déterminer $D_{(a,b)}f(1,1)$, c'est-à-dire la dérivée de f en (1,1) selon le vecteur (a,b).

Tout d'abord, on construit : $\varphi_{(a,b)}(t) = f((1,1)+t(a,b)) = f(1+ta, 1+tb) = (1+ta)(1+tb)^2$

Et : $\frac{f(a+th)-f(a)}{t} = \frac{(1+ta)(1+tb)^2-1}{t} = \frac{(1+ta)(1+2tb+t^2b^2)}{t} = \frac{1+2tb+t^2b^2+ta+2t^2ab+t^3ab^2-1}{t}$

Soit : $\frac{(2b+a)t+(2ab+b^2)t^2+t^3ab^2}{t} = (2b+a) + (2ab+b^2)t + t^2(ab^2)$

Cette quantité admet une limite en 0, et $D_{(a,b)}f(1,1) = a+2b$

2) Dérivées partielles

a) définition

Soit $e=(e_1,..,e_n)$ une base fixée de E et $j \in [\![1,p]\!]$

On dit que f admet une dérivée partielle en a selon la j -ème variable, ou admet une dérivée partielle en a suivant x_j, lorsque f admet une dérivée en le point a selon le vecteur e_j.

Cette dérivée est alors notée $D_j f(a)$ ou $\frac{\partial f}{\partial x_j}(a)$ et appelée la j -ème dérivée partielle de f en a : $\frac{\partial f}{\partial x_j}(a) = \lim\limits_{t \to 0} \frac{f(a+te_j)-f(a)}{t}$

Remarque :

Malheureusement cette nouvelle définition n'est pas satisfaisante, puisqu'une fonction peut admettre des dérivées selon tout vecteur en un point sans pour autant être continue en ce point !

Exemple : soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = \begin{cases} \frac{y^2}{x} & si\ x \neq 0 \\ y & sinon \end{cases}$ alors f admet des dérivées selon tout vecteur en (0,0) mais n'est pas continue en (0,0)…

En effet : $\frac{f((0,0)+th)-f(0,0)}{t} = \frac{f(th)-f(0,0)}{t} = \frac{f(th)}{t}$ puisque $f(0,0)=0$

Donc $\frac{f((0,0)+th)-f(0,0)}{t} = th_2{}^2$ (si $h=(h_1,h_2)$) donc $\frac{f((0,0)+th)-f(0,0)}{t} \to_{t \to 0} 0$

Et pourtant $f(t^3,t) = \frac{1}{t} \to \infty$ *lorsque* $t \to 0$, *donc pas continue en* 0 …

Etude d'un exemple : Dans la pratique, comme nous l'avions déjà vu pour les fonctions à 2 ou 3 variables, l'existence de dérivée partielle selon une variable « revient à considérer les autres variables comme des constantes ».
Ainsi : si f est la fonction de $\mathbb{R}^2$, définie par f(x,y) $= x^3 + 2x^4y^3 + 5y$ alors clairement les applications $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ existent et : $\frac{\partial f}{\partial x}$(x,y) = 3x²+$8x^3y^3$
Et $\frac{\partial f}{\partial y} = 6x^4y^2 + 5$

b) Règles de calculs avec les dérivées partielles :
Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, a$\in$ Ω, f et g : $\Omega \to \mathbb{R}$, on suppose que f et g admettent des dérivées partielles en a, alors :
-$\forall(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$, $\alpha f + \beta g$ admet des dérivées partielles en a et, $\forall j \in [\![1,n]\!]$, on a : $\boldsymbol{\frac{\partial(\alpha f+\beta g)}{\partial x_j} = \alpha\frac{\partial f}{\partial x_j} + \beta\frac{\partial g}{\partial x_j}}$

-La fonction fg admet des dérivées partielles en a et $\forall j \in [\![1,n]\!]$,
on a : $\boldsymbol{\frac{\partial(fg)}{\partial x_j} = \frac{\partial f}{\partial x_j}(a)g(a) + f(a)\frac{\partial g}{\partial x_j}(a)}$

-Si la fonction f ne s'annule pas, alors 1/f admet des dérivées partielles en a et, $\forall j \in [\![1,n]\!]$, on a : $\boldsymbol{\frac{\partial\left(\frac{1}{f}\right)}{\partial x_j}(a) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x_j}(a)}{f^2(a)}}$

-Si $\varphi: I \to \mathbb{R}$ est une fonction dérivable avec I intervalle de $\mathbb{R}$ et si f(Ω)$\subset$I alors $\varphi o f$ admet des dérivées partielles en a et $\forall j \in [\![1,n]\!]$,
on a : $\boldsymbol{\frac{\partial(\varphi o f)}{\partial x_j}(a) = \varphi'(f(a))\frac{\partial f}{\partial x_j}(a)}$

3) Fonctions de classe C^1

Une fonction f de Ω dans $\mathbb{R}$ est dite C^1 si ses dérivées partielles existent en tout point de Ω et si les fonctions $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ sont continues sur Ω.

4) Développement limité d'ordre 1
Préambule : Soit $\varphi: \Omega \to \mathbb{R}$ (Ω ouvert de $\mathbb{R}^n$), on écrit φ(h)=o($\|h\|^k$) au voisinage de 0, s'il existe une fonction : $\mathcal{E}: \Omega \to \mathbb{R}$ tendant vers 0 en 0 telle que : $\forall h \in \Omega$, φ(h)=$\|h\|^k$ $\mathcal{E}$ (h)
Dans la pratique, pour k=1, on utilisera o(h) plutôt que o($\|h\|$)

Soit a$\in \Omega$, on dit que f : $\Omega \to \mathbb{R}$ admet un développement limité à l'ordre 1 en a s'il existe des réels $\alpha_1, \alpha_2, .., \alpha_n$ tels que, au voisinage de 0 : f(a+h)=f(a)+$\sum_{j=1}^{p} h_j\alpha_j$ +o(h)

Théorème :
Soit f : $\Omega \to \mathbb{R}$, C^1alors f admet un développement limité à l'ordre 1 en tout point a de Ω, dont l'expression est : f(a+h)=f(a)+$\sum_{j=1}^{p} h_j\frac{\partial f}{\partial x_j}(a)$ +o(h)

Corollaire : Si f est C^1 sur Ω alors f est continue.

Démonstration : Conséquence directe de l'existence du DL à l'ordre 1.

5) Différentielle
Soit f : $\Omega \to \mathbb{R}$, C^1 et a$\in$ Ω, la différentielle de f en a, la différentielle de f en a est la forme linéaire sur $\mathbb{R}^n$ définie par : h$\to \sum_{j=1}^{n} h_j \frac{\partial f}{\partial x_j}$
Cette différentielle se note df(a)

Remarque : Un abus de langage (et une analogie avec le produit scalaire) fait qu'on note df(a).h pour alléger l'écriture df(a)(h).

6) Opérations algébriques sur les fonctions de classe C^1

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, a$\in$ Ω, f et g : $\Omega \to \mathbb{R}$, C^1 sur Ω, alors

-$\forall(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$, $\alpha f + \beta g$ est C^1 sur Ω
-De même fg est C^1 sur Ω

7) Composition par une fonction de variable réelle
Soit f : $\Omega \to \mathbb{R}$, φ: I $\to \mathbb{R}$ C^1 telle que f(Ω)$\subset$I alors $\varphi$of est C^1

Démonstration :
Les dérivées partielles de $\varphi$of sont toutes définies et $\forall j \in [\![1,n]\!]$,
$\frac{\partial \varphi \mathrm{of}}{\partial x_j} = (\varphi'\mathrm{of})\,\frac{\partial \mathrm{f}}{\partial x_j}$, or $\frac{\partial \mathrm{f}}{\partial x_j}$ est continue, donc $\frac{\partial \varphi \mathrm{of}}{\partial x_j}$ aussi

Exemple : Soit f$\in$ $C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$, on définit g sur $\mathbb{R}^2$ par : g(x,y)=f(x^2+xy+y^2), montrer que g est C^1.
Les dérivées partielles de f(x^2+xy+y^2) existent et $\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = (2x+y)f'(x^2+xy+y^2)$ et $\frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = (2y+x)f'(x^2+xy+y^2)$

8) Règles de calcul de différentielles
Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, a$\in$ Ω, f et g : $\Omega \to \mathbb{R}$, on suppose que f et g sont C^1
$\forall(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$, $\alpha f + \beta g$ admet des dérivées partielles en a et, $\forall j \in [\![1,n]\!]$, on a :
d($\alpha f + \beta g$)(a) $= \alpha df(a) + \beta dg(a)$
d(fg)(a)=df(a)g(a)+f(a)dg(a)

-Si la fonction f ne s'annule pas, d(1/f)(a) = - $\frac{df(a)}{f^2(a)}$

-Si φ: $I \to \mathbb{R}$ est une fonction dérivable avec I intervalle de $\mathbb{R}$ et si f(Ω)$\subset$I alors $d(\varphi o f) = \varphi'(f(a))df(a)$

9) Règle de la chaîne
Soit f : $\Omega \to \mathbb{R}$ une fonction C^1, $x_1,\dots,x_n$ des fonctions dérivables sur I telles que $\forall t \in$I, (x_1(t),…,x_n(t)) $\in \Omega$
Alors la fonction g : t$\to f(\mathbf{x1}(\mathbf{t}),\dots,\mathbf{xn}(\mathbf{t}))$est dérivable sur I
Et g'(t) = $\sum_{j=1}^{n} x_j'(t)\,\frac{\partial f}{\partial x_j}$($x_1$(t),…,$x_n$(t)))

Remarque : on peut reformuler en disant : Soit f : $\Omega \to \mathbb{R}$ une fonction C^1
et $\gamma : I \to \Omega$ dérivable, alors $fo\gamma$ est dérivable sur I et :
$\forall t \in$I, $(fo\gamma)'(t) = \gamma'(t)df(\gamma(t))$

10) Caractérisation des fonctions constantes sur un ouvert convexe
Soit Ω ouvert convexe non vide.
Une fonction f : $\Omega \to \mathbb{R}$ est constante si et seulement si elle est de classe C^1 et df=0

Démonstration :
Si f est constante, elle est C^1, et toutes ses dérivées partielles sont nulles donc df=0
Réciproquement : Soit $\gamma : t \to (1-t)a+tb$ est C^1 et pour tout t de [0,1], $\gamma(t) \in \Omega$

II. <u>Extrema (les fonctions sont toujours ici à valeurs dans $\mathbb{R}$)</u>

1) Définition
On suppose que E est un espace euclidien.
Soit f :U→ $\mathbb{R}$ différentiable en a∈U
La différentielle de f au point a, df(a), est une forme linéaire sur E.
Ainsi, il existe un unique vecteur de E, noté $\overrightarrow{grad}(f(a))$ tel que $\forall h \in E, df(a)(h) = (\overrightarrow{grad}(f(a))|h)$.
Le vecteur $\overrightarrow{grad}(f(a))$ s'appelle le gradient de f en a.

Remarque : Si e=$(e_i)_{1\leq i\leq p}$ est une base orthonormée de E, df(a)(h) = $\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)h_i$, donc les coordonnées du gradient en base e sont données par :
$\overrightarrow{grad}(f(a)) = \sum_{i=1}^{p} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)e_i$ **on le note** $\nabla f(a)$

Exercice :
Soit f :E→ $\mathbb{R}$, x→ $\|x\|$ (avec E espace vectoriel de dimension finie)
a) Montrer que f est différentiable sur E\{0}
b) Montrer que $\forall x \in$ E\{0}, gradf(x) $= \frac{x}{\|x\|}$

Pour tout x≠ 0, pour tout h de E : $\|x+h\|^2 = \|x\|^2 + 2(x|h) + \|h\|^2$

Donc f(x+h)=f(x)$\left(1+2\frac{(x|h)}{\|x\|^2} + \frac{\|h\|^2}{\|x\|^2}\right)^{1/2}$ or $\sqrt{1+u} = 1+\frac{u}{2} + o(u)$

Ainsi : f(x+h) = f(x) + $\frac{(x|h)}{\|x\|}$ + o(h), et f est différentiable sur E\{0}

Et gradf(x) $= \frac{x}{\|x\|}$

2) Définition
Extremum local (ou relatif) : La fonction f admet un maximum local (resp. un minimum local) au point a de U lorsque : $\exists r > 0$ *tel que* $\forall x \in B(a,r) \cap U, f(x) \leq f(a)$
(resp. $\exists r > 0$ *tel que* $\forall x \in B(a,r) \cap U, f(x) \geq f(a)$)

3) Définition : **Soit f :U→ $\mathbb{R}$, différentiable en un point « a » de U, on dit que « a » est un point critique de f si df(a)=0**

4) Théorème :

Soit f une fonction définie sur un ouvert U de $\mathbb{R}^p$, à valeurs réelles.

Soit a∈U, si f admet un extremum local en a et si f est différentiable en a, alors a est un point critique de f.

Démonstration :

Supposons que f admette un extremum local en a∈U.

Supposons que ce soit ici un maximum, comme U est un ouvert : $\exists \eta > 0, B_f(a,\eta) \subset U$ et $\forall x \in B_f(a,\eta)$, f(x)$\leq f(a)$

Soit h∈ $\mathbb{R}^p \setminus\{(0,0)\}$,

Soit : $\varphi : t \to f(a+th)$, définie sur]- $\frac{\eta}{\|\eta\|}, \frac{\eta}{\|\eta\|}$[

On a φ qui admet un maximum en 0, comme f est C^1, φ est dérivable en 0 et $\varphi'(0) = df(a)h$

Or φ admet un maximum en un point où elle est dérivable donc $\varphi'(0)$ =0

Soit : $df(a)h = 0$, comme cette égalité est vérifiée pour tout h∈ $\mathbb{R}^p \setminus\{(0,0)\}$, on en déduit que $df(a) = 0$

Exemple :

Déterminer les extrema sur $\mathbb{R}^2$ de f : (x,y)→$3x+x^2+xy+y^2$

Tout d'abord, f est polynomiale donc continue.

De plus, $\mathbb{R}^2$ est un ouvert, donc un extremum local ou global ne pourra être atteint qu'en un point critique.

Déterminons les points critiques : $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 3 + 2x + y \ et\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x + 2y$

On résout $\begin{cases} 2x + y = -3 \\ x + 2y = 0 \end{cases}$, soit un unique point critique : (-2,1)

Etudions ce point critique :

On a : f(-2+h,1+k) = f(-2,1)+h^2+hk+k^2 = f(-2,1)+ $(h+\frac{k}{2})^2 + 3\frac{k^2}{4}$ et $(h+\frac{k}{2})^2 + 3\frac{k^2}{4} \geq 0$ donc f(-2+h,1+k) ≥ f(-2,1), donc (-2,1) correspond à un minimum global puisque l'inégalité est vraie quelque soient h et k.

Est-ce que f admet un maximum global ? Non, puisque f(0,t)=$t^2 \to +\infty$

III. Fonctions de classe C^2

1) Dérivées partielles d'ordre 2

Soit f :$\Omega \to \mathbb{R}$ avec Ω ouvert de $\mathbb{R}^n$

Soit (i,j) ∈ $[\![1,n]\!]^2$; lorsqu'elle existe la fonction $\frac{\partial}{\partial x_i}(\frac{\partial f}{\partial x_j})$ est appelée partielle de f selon les indices (i,j) et notée : $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$

Remarque, lorsque i=j, on note $\frac{\partial^2 f}{\partial {x_j}^2}$

2) Classe C^2

Une application f :$\Omega \to \mathbb{R}$ avec Ω ouvert de $\mathbb{R}^n$ est dite **C^2, si toutes ses dérivées partielles d'ordre 1 sont définies et C^1.**

Théorème : Si f est C^2 alors f est C^1
Démonstration : Si f est C^2 alors toutes les dérivées partielles existent et sont C^1, donc les dérivées partielles sont continues !

3) Opérations algébriques sur les fonctions de classe C^2
Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, a$\in$ Ω, f et g : $\Omega \to \mathbb{R}$, on suppose que f et g sont C^2
$\forall(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$, $\alpha f + \beta g$ est C^2

-Si la fonction f ne s'annule pas, 1/f est C^2

-Si $\varphi : I \to \mathbb{R}$ est une fonction dérivable avec I intervalle de $\mathbb{R}$ et si f(Ω)$\subset$I alors $\varphi o f$ est C^2

4) Théorème de Schwarz (admis)
Soit f : $\Omega \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 alors : $\forall$(i,j) $\in$ $[\![1,n]\!]^2$ $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$

Exercice :
On considère la fonction f : $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par : $\begin{cases} \frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} \ si \ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 \ si \ (x,y) = (0,0) \end{cases}$

a) Calculer $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$
b) Montrer l'existence de $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$
c) Que peut-on en déduire ?

Pour x$\neq$ 0, $\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x} = 0$ donc $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$, de même $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0$

A présent : $\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0,y)-\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{y} = -1$ donc $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = -1$

Il résulte du théorème de Schwarz que f n'est pas C^2

5) Développement limité d'ordre 2 (théorème admis)
Soit f : $\Omega \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 et a$\in$ Ω
On a au voisinage de 0 : **f(a+h) = f(a)+df(a).h+$\frac{1}{2}\boldsymbol{h^T H_{f(a)} h} + \boldsymbol{o}(\|\boldsymbol{h}\|^2)$**

Avec $\boldsymbol{H_{f(a)}}$ la matrice de terme général : ($\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$), il s'agit de la matrice Hessienne et selon le théorème de Schwarz, cette matrice est symétrique.

B. Cadre général (de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$)

I. Applications différentiables

1) Lemme
Soit a$\in$U
S'il existe une application linéaire $L_a \in \mathcal{L}$(E,F) telle que :
f(a+h) = f(a)+L_a(h)+o($\|h\|$))

C'est-à-dire telle que h→ $\frac{1}{\|h\|}$(f(a+h)- f(a)-L_a(h)) définie sur l'ouvert (U-a)\{0}={h∈ $E\{0\}, a + h \in U\}$ ait une limite nulle en 0,
Alors cette application est unique et s'appelle l'application linéaire tangente à f en a.

Démonstration de l'unicité :
Supposons qu'il existe deux applications linéaires L_1 et L_2 telles que $L_1,L_2 \in \mathcal{L}(E,F)^2$ telles que : f(a+h) = f(a)+L_1(h)+o(h)= f(a)+L_2(h)+o($\|h\|$))
Alors (L_1 - L_2)(h)=0+ o($\|h\|$)), soit: $\lim_{h\to 0} \frac{\|(L_1-L_2)(h)\|}{\|h\|} = 0$
Soit x∈E, et t∈ ℝ, comme tx$\to_{t\to 0}$0, alors $\lim_{t\to 0} \frac{\|(L_1-L_2)(tx)\|}{\|tx\|} = 0$
Or $\frac{\|(L_1-L_2)(tx)\|}{\|tx\|} = \frac{\|(L_1-L_2)(x)\|}{\|x\|}$ donc $\frac{\|(L_1-L_2)(x)\|}{\|x\|} = \lim_{t\to 0} \frac{\|(L_1-L_2)(tx)\|}{\|tx\|} = 0$
Ainsi, pour tout x∈E, $(L_1 - L_2)$(x)= 0 et $L_1 = L_2$

Remarque : Comme L_a est linéaire, on note aussi bien L_a(h) = L_ah = L_a.h

2) Définition
Soit a∈U
On dit que f est **différentiable en a** lorsque les conditions du lemme précédent sont vérifiées.
L'application linéaire tangente à f en a est notée df(a) et appelée la différentielle de f au point a. Elle vérifie : **f(a+h)=f(a)+df(a)(h)+o($\|h\|$)**

Remarque : L'expression précédente est un développement limité de f en a à l'ordre 1.

Exemples :
Pour les fonctions d'une variable réelle, la différentielle de f au point « a » vérifie : df(a)(h)=hf '(a)

Si f est la restriction à un ouvert U d'une application linéaire de E dans F, alors f est différentiable en tout point a de U, et df(a)=f
En effet : f(a+h)-f(a)=f(h)=hf(1)…

3) Proposition de combinaison linéaire d'applications différentiables
Soit f et g deux applications de U dans F différentiables en a∈U
Alors pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, $\lambda f + \mu g$ est différentiable en a
Et : **d($\lambda f + \mu g$)(a) = $\lambda df(a) + \mu dg$(a)**

En effet :
Comme f différentiable en a, il existe $L_1 \in \mathcal{L}$(E,F) telle que : f(a+h) = f(a)+L_1(h)+o($\|h\|$)), de même il existe $L_2 \in \mathcal{L}$(E,F) telle que : g(a+h) = g(a)+L_2(h)+o($\|h\|$)), d'où $(\lambda f + \mu g)$(a+h) = $\lambda f(a+h) + \mu g(a+h)$ = λ(f(a)+L_1(h))+ μ(g(a)+L_2(h))+o($\|h\|$) = $(\lambda f + \mu g)$(a)+ λ(L_1(h))+ μ(L_2(h)) +o($\|h\|$)

4) Composée d'applications différentiables

Soit une application f définie sur un ouvert U de E, à valeurs dans un ouvert V de F, différentiable en a∈U, et une application g de V dans G, espace normé de dimension finie sur $\mathbb{R}$, différentiable en f(a).
Alors : gof est différentiable en a, et **d(gof)(a) = dg(f(a))odf(a)**

Démonstration (admise dans un premier temps)

5) Proposition
Soit f :U→ F_1, g : U→ F_2 et B : $F_1 \times F_2 \to G$ *une application bilinéaire.*
Si f et g sont différentiables en a, alors B(f,g) est différentiable en a
Et : $\forall \boldsymbol{h} \in \boldsymbol{E}, \boldsymbol{dB}(\boldsymbol{f}, \boldsymbol{g})(\boldsymbol{a})(\boldsymbol{h}) = \boldsymbol{B}(\boldsymbol{df}(\boldsymbol{a})(\boldsymbol{h}), \boldsymbol{g}(\boldsymbol{a})) + \boldsymbol{B}(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}), \boldsymbol{dg}(\boldsymbol{a})(\boldsymbol{h}))$

Démonstration :
On utilise la bilinéarité de B ainsi que l'inégalité de Cauchy-Schwarz

6) Proposition
Soit f : U→F
Soit b=$(b_1, \dots, b_n)$ une base fixée de F
Notons $f_1,\dots,f_n$ les applications coordonnées de f relativement à cette base.
On a $\forall x \in U, f(x) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x) b_i$

Alors f est différentiable en a si et seulement si les n fonctions coordonnées sont toutes différentiables en a.
Lorsque ces conditions sont remplies, on a : $\forall h$ ∈E,
df(a)(h)=(df$_1$(a)(h),…,df$_n$(a)(h))

Remarque : On se ramène ainsi à l'étude de fonctions à valeurs réelles.

Démonstration : En effet, pour t$\neq a$, $\frac{f(t)-f(a)}{t-a} = \sum_{i=1}^{n} \frac{f_i(t)-f_i(a)}{t-a} b_i$, il suffit de passer alors à la limite…

II. <u>Dérivées selon un vecteur</u>

1) Définition : « dérivée en un point selon un vecteur »
Soit h un vecteur fixé
Il existe un nombre réel δ>0 tel que : pour tout t∈[- δ, δ], at+h∈U
On pose alors $\varphi_h(t) = f(a + th)$
On dit que f est dérivable en a selon le vecteur h, lorsque φ_h est dérivable à l'origine.
On pose alors : **D$_h$f(a)=** $\boldsymbol{\varphi_h}'(\mathbf{0}) = \lim\limits_{t\to 0} \frac{f(a+th)-f(a)}{t}$

Ce vecteur est appelé la dérivée de f en le point a selon le vecteur h.

2) Définition : « dérivées partielles »
Soit e=$(e_1, \dots, e_n)$ une base fixée de E.
Soit j∈ $[\![1, p]\!]$
On dit que f admet une dérivée partielle en a selon la j -ème variable, ou admet une dérivée partielle en a suivant x_j, lorsque f admet une dérivée en le point a selon le vecteur e_j.

Cette dérivée est alors notée $D_j f(a)$ ou $\frac{\partial f}{\partial x_j}(\boldsymbol{a})$ et appelée la j -ème dérivée partielle de f en a : $\frac{\partial f}{\partial x_j}(\boldsymbol{a}) = \lim\limits_{t \to 0} \frac{f(a+te_j)-f(a)}{t}$

3) Théorème
Si f est différentiable au point a, alors f est continue en a.

Démonstration :
Il existe une application linéaire $L_a \in \mathcal{L}(E,F)$ telle que : $f(a+h) = f(a)+L_a(h)+o(\|h\|)$
Comme $L_a \in \mathcal{L}(E,F)$, $\lim\limits_{h \to 0} L_a(h) = 0$ donc $\lim\limits_{h \to 0} f(a+h) = f(a)$

Si f est différentiable en $a \in \Omega$, alors f admet des dérivées selon tout vecteur h, en outre, $df(a)(h) = D_h f(a)$

Démonstration :
Soit $h \in \mathbb{R}^p$,
la fonction γ :
$t \to a + th$ *est* à *valeurs dans* Ω *au voisinage de* 0 (*puisque* Ω est ouvert)
La dérivée en 0 de fo γ est par définition la dérivée de f en a selon le vecteur h.
Or $\gamma' = h$, donc $D_h(f(a)) = D_h(f o \gamma(a)) = d(f(a))\, \gamma' = d(f(a))h$

Pour toute base $(e_1, .., e_n)$ de E, si $h = \sum_{i=1}^{p} h_i e_i$
Alors : $df(a)(h) = D_h f(a) = \sum_{j=1}^{p} h_j D_{e_j} f(a)$

4) Définition : Matrice Jacobienne
Soit f une application C^1 sur U à valeurs dans F.
Soit $e=(e_1, .., e_p)$ une base de E
Soit $b=(b_1, .., b_n)$ une base de F
On note $f = \sum_{i=1}^{n} f_i b_i$
Soit $a \in U$

La matrice de df(a) relative aux bases e et b, est la matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, notée $J_f(a)$, et définie par : $\boldsymbol{J_f(a)} = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\boldsymbol{a})\right)_{\substack{i=1,\dots n \\ j=1,\dots,p}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\boldsymbol{a}) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_p}(\boldsymbol{a}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(\boldsymbol{a}) & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_p}(\boldsymbol{a}) \end{pmatrix}$

Dans le cas où $E=\mathbb{R}^p$ et $F=\mathbb{R}^n$ et e et b leurs bases canoniques respectives, on l'appelle, **la matrice Jacobienne de f en a.**

Définition : Si E=F, on prend b=e, le jacobien de f au point a est, noté $j_f(a)$ le déterminant de la matrice Jacobienne de f en ce point.

5) Exemples :
Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x,y) \to (xy, x+y)$
Montrer que f est C^1 sur $\mathbb{R}^2$

Déterminer la Jacobienne de f au point (x,y)

Mêmes questions avec $\varphi: \mathbb{R}\times]-\pi;\pi] \rightarrow \mathbb{R}$, (r,$\theta$) $\rightarrow (rcos(\theta), rsin(\theta))$

On a : $\frac{\partial f_1}{\partial x}(x,y) = y, \frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y) = 1, \frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y) = x\ et\ \frac{\partial f_2}{\partial y}(x,y) = 1$
Donc les dérivées partielles existent et sont continues donc f est C^1 sur $\mathbb{R}^2$
On a : J=$\begin{pmatrix} y & x \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

On a : $\frac{\partial f_1}{\partial r}(\mathrm{r},\theta) = \cos(\theta), \frac{\partial f_2}{\partial r}(\mathrm{r},\theta) = \sin(\theta), \frac{\partial f_1}{\partial \theta}(\mathrm{r},\theta) = -\mathrm{r}\sin(\theta)\ et\ \frac{\partial f_2}{\partial \theta}(\mathrm{r},\theta) = r\cos(\theta)$
Donc les dérivées partielles existent et sont continues donc f est C^1 sur $\mathbb{R}^2$
On a : J=$\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\mathrm{r}\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & r\cos(\theta) \end{pmatrix}$

6) Proposition
Soit f une application définie sur un ouvert U de E, à valeurs dans un ouvert V de F, différentiable en a∈U, et g une application de V dans G, espace normé de dimension finie sur $\mathbb{R}$, différentiable en f(a).
Alors gof est différentiable en a et : $J_{(gof)}(a) = J_g(f(a))J_f(a)$

Si E=F=G, $j_{(gof)}(a)=j_g(f(a))j_f(a)$

Démonstration :
Il suffit de montrer que :
$\forall (i,j) \in [\![1,m]\!] \times [\![1,p]\!], \frac{\partial (g_i o f)}{\partial x_j}(a) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial g_i}{\partial y_k}(f(a)) \frac{\partial f_k}{\partial x_j}(a)$

Soit h∈E, pour h « assez petit », on a : go*f(a+h)* = g(*f(a)+df_a(h)+o(h)*)
Ainsi : gof(a+h)-gof(a) = g(f(a)+df_a(h)+o(h)) – gof(a)
Et : gof(a+h)-gof(a) = $dg_{f(a)}$(df_a(h)+o(h))+o(df_a(h)+o(h))
Soit : gof(a+h)-gof(a) = $dg_{f(a)}o df_a$(h)+ $dg_{f(a)}$(o(h))+o(df_a(h)+o(h))

Or en dimension finie, les applications linéaires sont continues donc, il existe C et C' tels que : $\|\mathrm{dfa(h)}\| \leq C\|h\|$ et $\|\mathrm{dgf(a)(o(h))}\| \leq C'\|h\|$, d'où le résultat…

7) Corollaire
En utilisant le produit des matrices jacobiennes,
on obtient : $\begin{pmatrix} \frac{\partial g_1 of}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial g_1 of}{\partial x_p}(a) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_m of}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial g_m of}{\partial x_p}(a) \end{pmatrix} =$
$\begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial y_1}(f(a)) & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial y_n}(f(a)) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_m}{\partial y_1}(f(a)) & \cdots & \frac{\partial g_m}{\partial y_n}(f(a)) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_p}(a) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_p}(a) \end{pmatrix}$

Soit: $\forall (i,j) \in [\![1,m]\!] \times [\![1,p]\!], \frac{\partial g_i o f}{\partial x_j}(a) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial g_i}{\partial y_k}(f(a)) \frac{\partial f_k}{\partial x_j}(a)$

8) Dérivée le long d'un arc
Soit $\gamma: t \rightarrow (x_1(t), \ldots, x_n(t))$ dérivable sur un intervalle I, à valeurs dans V, ouvert de $\mathbb{R}^n$ et f :V→ $\mathbb{R}^m$ différentiable sur V, alors foγ est dérivable sur I
Et : $\forall t \in I, (\mathrm{fo}\gamma)'(t) = \mathrm{d}(\mathrm{f}(\gamma(\mathrm{t}))(\gamma'(t)) = \sum_{k=1}^{n} x_k{}'(t) \frac{\partial f}{\partial x_k}(\gamma(t))$

III. Vecteur tangent à une partie d'un espace normé de dimension finie.

1) Définition
Soit X une partie de E, x un point de X
On dit que v∈E est dit tangent à X en x lorsqu'il existe $\varepsilon > 0$, et un arc γ défini sur]- ε , ε [
Dérivable en 0 à valeurs dans X tels que $\gamma(0)$=x et $\gamma'(0)$=v

Exemple :
Soit U un ouvert de $\mathbb{R}$, f :U→ $\mathbb{R}$ une fonction différentiable.
Le graphe de f est la partie X={(x,y,f(x,y)), (x,y) $\in U$} de $\mathbb{R}^3$
Soit $(x_0; y_0) \in U, z_0 = f(x_0; y_0)$ et $M_0=(x_0; y_{0;} z_{0;}) \in X$
Les vecteurs tangents à X en M_0 sont les a$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \end{pmatrix}$+b$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \end{pmatrix}$, (a,b)∈ $\mathbb{R}^2$

Le plan tangent à X en M_0 est le plan d'équation :
$(X-x_0) \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) + (Y-y_0) \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)(Z-z_0) = 0$

Etude d'un « exercice classique »
Soit f : $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par : f(x,y,z) = $x^2 - xy^3 - y^2z + z^3$
La surface S correspond à l'équation f(x,y,z)=0.
Vérifier que l'équation du plan tangent en (1,1,1) à S est : x-5y+2z+2 = 0

2) Proposition
Soit E un espace euclidien
U un ouvert de E
f :U→ $\mathbb{R}$, différentiable , k∈f(U), X={M∈ U, f(M)=k} la ligne de niveau k de f.
Pour chaque point x de X, les vecteurs tangents à X en x, sont orthogonaux au gradient de f en x.

IV. Applications de classe C^1

1) Définition
Soit f une application définie sur un ouvert U.
On dit que f est continûment différentiable ou de classe C^1 sur U lorsque f est différentiable sur U, et sa différentielle df est continue sur U.

2) Théorème

Soit f une application définie sur un ouvert U de E, **alors f est de classe C^1 sur l'ouvert U, si et seulement si, les dérivées partielles de f relativement à une base de E existent en tout point de U et sont continues sur U.**

Remarque : Dans ce cas, si h $= \sum_{j=1}^{p} h_j e_j$, alors df(a)(h) $= \sum_{j=1}^{p} h_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(a)$

3) Proposition
Les fonctions de classe C^1 de U dans F forment un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, noté $C^1(U,F)$

4) Proposition
Soit une application f de classe C^1 sur un ouvert U de E, à valeurs dans un ouvert V de F, et une application g de classe C^1 sur V, à valeurs dans G, espace normé de dimension finie, sur $\mathbb{R}$, alors gof est de classe C^1 sur U.

5) Proposition
Soit f :U→F
Soit b=$(b_1, \dots, b_n)$ une base fixée de F
Soit $f_1,\dots,f_n$ les applications coordonnées de f relativement à cette base : $\forall x \in U, f(x) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x) b_i$
Alors f est de classe C^1 sur U si et seulement si $f_1,\dots,f_n$ sont toutes de classe C^1 sur U.

Dans ce cas, pour tout vecteur h de E, pour tout x de U, $D_h f(x) = \sum_{i=1}^{n} D_h f_i(x) b_i$

6) Corollaire
Dans le cas particulier où F $= \mathbb{R}^n$, et b est sa base canonique, on a, $\forall x \in U, f(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x))$
On obtient : f est de classe C^1 sur U si et seulement si les applications coordonnées sont toutes de classe C^1 sur U, dans ce cas, les coordonnées des dérivées partielles sont les dérivées partielles des coordonnées.

7) Expression du gradient en coordonnées polaires
a) Définition/théorème
L'application $\varphi:]0, +\infty[\times] - \pi, \pi[\to V = \mathbb{R}^2 \backslash \{(x, 0), x \leq 0\}$, $(\rho, \theta) \to$(x,y)=($\rho\cos(\theta), \rho\sin(\theta)$) est de classe C^1

Si (e_1,e_2) est la base canonique de $\mathbb{R}^2$, pour $\theta \in \mathbb{R}$, on appelle repère polaire le repère $(0,\overrightarrow{u(\theta)}, \overrightarrow{v(\theta)})$ défini par : $\overrightarrow{u(\theta)} = \cos(\theta)e_1+\sin(\theta)e_2$ et $\overrightarrow{v(\theta)} = -\sin(\theta)e_1+\cos(\theta)e_2$

b) Théorème
Si f est une fonction C^1 sur un ouvert Ω inclus dans V à valeurs dans $\mathbb{R}$, alors F=foφ est de classe C^1 sur l'ouvert $\varphi^{-1}(\Omega)$
On a : $\overrightarrow{grad} f = \frac{\partial F}{\partial \rho}\vec{u} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial F}{\partial \theta}\vec{v}$

Démonstration:

En exercice, faisant appel à la dérivée d'une composée…

8) Proposition

Si U est un ouvert de E et si f et g sont deux applications à valeurs réelles de classe C^1 sur U, alors fg est de classe C^1 sur U.

Et : $\forall \boldsymbol{a} \in \boldsymbol{U}$, **d(fg)(a) = f(a)dg(a) + g(a)df(a)**

Et, $\forall \boldsymbol{j} \in [\![\boldsymbol{1}, \boldsymbol{p}]\!], \forall \boldsymbol{a} \in \boldsymbol{U}, \frac{\partial \boldsymbol{fg}}{\partial \boldsymbol{x_j}}(\boldsymbol{a}) = \frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{x_j}}(\boldsymbol{a})\boldsymbol{g}(\boldsymbol{a}) + \boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})\partial \frac{\partial \boldsymbol{g}}{\partial \boldsymbol{x_j}}(\boldsymbol{a})$

9) Corollaire

Les fonctions polynômes sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}^n$

Les fonctions rationnelles sont C^1 sur leur ensemble de définition.

V. Dérivées partielles d'ordre supérieur ou égal à 2 et extrema

1) Définition

Soit U un ouvert de E

Soit f :U→F une application

Soit a∈U, soit $(i_1,\dots i_k) \in \{1,\dots,p\}^k$

On dit que f admet une dérivée partielle k-ième en a par rapport aux variables $x_{i_1}, \dots x_{i_k}$

Lorsque :

-on a $\frac{\partial f}{\partial x_{i_1}}$; $\frac{\partial}{\partial x_{i_2}}(\frac{\partial f}{\partial x_{i_1}})$ etc. existent sur un voisinage de a.

-et $\frac{\partial}{\partial x_{i_k}}(\frac{\partial}{\partial x_{i_{k-1}}}(\dots(\frac{\partial}{\partial x_{i_2}}(\frac{\partial f}{\partial x_{i_1}})..)(a)$ existe

Dans ce cas, l'élément $\frac{\partial}{\partial x_{i_k}}(\frac{\partial}{\partial x_{i_{k-1}}}(\dots(\frac{\partial}{\partial x_{i_2}}(\frac{\partial f}{\partial x_{i_1}})..)(a)$ est noté $\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_k} \partial x_{i_{k-1}} \dots \partial x_1}$

2) Définition

Soit U un ouvert de E, et f :U→F une application

Soit k un entier supérieur ou égal à 1

La fonction f est dite C^k sur l'ouvert U, si elle admet des dérivées partielles sur U, jusqu'à l'ordre k inclus par rapport à toutes les variables et si ces dérivées partielles sont continues sur U.

La fonction f est dite C∞ sur l'ouvert U, si elle admet des dérivées partielles sur U, jusqu'à l'ordre k inclus par rapport à toutes les variables et si ces dérivées partielles sont continues sur U pour tout entier k.

3) Proposition

Soit k un entier supérieur ou égal à 2, l'application f est de classe C^k sur U si f est C^1 et ses fonctions dérivées partielles sont C^{k-1} sur U.

4) Proposition

Soit $b=(b_1,\dots,b_n)$ une base fixée de F.

On note $f_1,\dots,f_n$ les applications coordonnées de f, ainsi $\forall x \in U, f(x) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x)\, b_i$

La fonction f :U→F est de classe C^k sur U, si et seulement si chacune des applications coordonnées est de classe C^k sur U.

5) Proposition
Soit f et g :U→F, deux applications de classe C^k sur l'ouvert U, alors pour tout couple de réels (α, β), la fonction $\alpha f + \beta$g est de classe C^k sur U.

6) Théorème
Soit f : U→F et g : V→G deux applications de classe C^k telles que f(U)⊂V (ouvert)
Alors gof est C^k sur U.

7) Théorème de Schwarz (admis)
Soit U un ouvert de E
Soit f une application de U dans F, de classe C^2 sur U
Alors pour tout point a de U : $\forall(\boldsymbol{i},\boldsymbol{j}) \in [\![\mathbf{1},\boldsymbol{p}]\!]^{\mathbf{2}}, \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\boldsymbol{a}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\boldsymbol{a})$
Remarque : En particulier, pour une fonction f : U→F, de classe C^2 sur l'ouvert U de $\mathbb{R}^2$, à valeurs réelles, alors on a : $\forall a \in U, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a)$

8) Corollaire
Soit f : U→ F une application C^k sur U.
Alors les dérivées partielles de f jusqu'à l'ordre k ne dépendent pas de l'ordre de dérivation

9) Théorème : Formule de Taylor-Young (admis)
Soit f : U→ $\mathbb{R}$, une fonction de classe C^2 sur l'ouvert U de $\mathbb{R}^2$ et a∈U
On note r=$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a)$, t=$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a)$ et s=$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a)$
Lorsque h=(h_1 ;h_2) tends vers 0 de sorte que a+h∈U
Alors, on a : $\mathbf{f(a+h) = f(a) + h_1\frac{\partial f}{\partial x}(a) + h_2\frac{\partial f}{\partial y}(a) + \frac{1}{2}(rh_1^2+2sh_1h_2 + th_2^2)+o(\|h\|^2)}$

10) Recherche des extrema locaux d'une fonction de deux variables réelles
Soit f : U→ $\mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 sur l'ouvert U de $\mathbb{R}^2$
Soit **a un point de U, critique pour f.**
On note r=$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a)$, t=$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a)$ et s=$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a)$
Si $rt-s^2>0$ et r>0 alors f admet un minimum local en a
Si $rt-s^2>0$ et r<0 alors f admet un maximum local en a
Si $rt-s^2<0$ alors f ne présente pas d'extremum local en a (on parle de point selle)

Remarque : Ce théorème ne permet pas de conclure lorsque $rt-s^2 = 0$

Démonstration :
On a: $f(a+h) = f(a) + h_1\frac{\partial f}{\partial x}(a) + h_2\frac{\partial f}{\partial y}(a) + \frac{1}{2}(rh_1^2+2sh_1h_2 + th_2^2)+o(\|h\|^2)$
Or a est un point critique donc $f(a+h) = f(a) + \frac{1}{2}(rh_1^2+2sh_1h_2 + th_2^2)+o(\|h\|^2)$

Soit : f(a+h)-f(a) = $\frac{1}{2}$($rh_1^2+2sh_1h_2 + th_2^2$)+o($\|h\|^2$)

Soit J = $\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a) \end{pmatrix}$ symétrique réelle (conséquence du théorème de Schwarz), on a : J = $\begin{pmatrix} r & s \\ s & t \end{pmatrix}$, J est diagonalisable dans une bon de vecteurs propres.

On a det(J) = rt-s^2 = $\alpha\beta\ avec\ sp(J) = \{\alpha, \beta\}$

Si rt-s^2>0 alors α, β sont du même signe, si tr(J)>0 ou tr(J)<0 et ici, α, β sont positives. Donc J est définie positive, et il s'agit d'un minimum.

On termine la démonstration par des considérations analogues !

Exercice « classique » :

Soit f : $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, définie par : f(x,y) = $x^2+xy+y^2-3x-6y$

Montrer que f admet (0,3) comme minimum local.

VI. Difféomorphismes

1) définition

Soit U un ouvert de l'espace vectoriel de dimension finie E, V un ouvert de l'espace vectoriel de dimension F, et k un entier naturel non nul.

On dit que f est un C^k-difféomorphisme de U sur V, si f est une bijection de U sur V telle que f soit de classe C^k et f^{-1} soit de classe C^k.

2) utilité

Les applications de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$ qui sont bijectives et de classe C^1 ainsi que leur réciproque, sont utilisées comme changements de variables.

Théorème (admis) : Soient U et V deux ouverts de $\mathbb{R}^n$, φ C^1-difféomorphisme de U sur V.

Soit f une fonction intégrable de V dans $\mathbb{C}^2$ alors : $\int_V f(y) d\lambda(y) = \int_U f(\varphi(x)) |\det (J(\varphi))(x)| d\lambda(x)$ où $J(\varphi)$ désigne la jacobienne de φ

Exemple : Retrouver $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}$dx (on partira de $\iint_0^{+\infty} e^{-x^2-y^2} dxdy$ et on fera connaissance avec le théorème de Fubini…)

Exercice « classique » :

Soit Δ={(x,y)∈ $\mathbb{R}^2$, $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$, $0 < x^2 + y^2 \leq 1$}

Calculer l'intégrale double à l'aide d'un passage aux coordonnées polaires : I = $\iint_\Delta \frac{dxdy}{1+x^2+y^2}$

On passe aux coordonnées polaires, x=rcos(θ) et y= rsin(θ)

Et 0≤r≤1 et $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$

Après calculs, I=$\frac{\pi \ln(2)}{4}$

3) propriété :

Si f est un C^k-difféomorphisme de U sur V alors pour tout a de U, si b=f(a), alors df_a est un isomorphisme de E dans F tel que $(df_a)^{-1} = df^{-1}_b$

Démonstration :

Comme $fof^{-1} = Id_V$ alors $d(fof^{-1}) = Id_E$ or $d(fof^{-1}) = df_a.df^{-1}_b$

Remarque : S'il existe f C^k-difféomorphisme de U ouvert de E sur V ouvert de F alors dim(E) = dim(F)

Démonstration : E et F sont isomorphes !

4) Théorème admis :

Soit U un ouvert de E et f une application injective de classe C^k, alors f(U) est un ouvert et f est un C^k-difféomorphisme si et seulement si pour tout a de U df_a est inversible.

VII. Applications à la résolution d'équations aux dérivées partielles

Etude d'un exercice :
Soit U={(x,y)∈ $\mathbb{R}^2, x^2 - y^2 > 0$}
On veut déterminer toutes les applications f :U→ $\mathbb{R}$ C^2 *sur U*
Telle que : $\forall (x,y) \in U, \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \frac{1}{\sqrt{x^2-y^2}}$

1) Etant donné f, on définit g par : g(x+y,x-y)=f(x,y)
   Justifier que g est C^2
   Calculer $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)$ en fonction des dérivées partielles de g
2) Résoudre le problème initial

VIII. Théorème de Poincaré (HP)

1) Forme exacte
   On dit qu'une forme différentielle ω définie sur l'ouvert U de $\mathbb{R}^n$ est exacte s'il existe une application f de classe C^1 de U dans $\mathbb{R}$ telle ω=df.

2) Forme fermée
   On dit que la forme différentielle $\omega=\omega_1 dx_1+\cdots+\omega_n dx_n$ de classe C^1 définie sur l'ouvert U de $\mathbb{R}^n$ est fermée si elle vérifie :$\forall (i,j) \in \{1,\dots,n\}^2$, $\frac{\partial w_i}{\partial x_j} = \frac{\partial w_j}{\partial x_i}$

3) Ouvert étoilé
   Un ouvert étoilé est un ouvert possédant un point pouvant être relié par un segment à chacun des points de l'ouvert, et tel que ce segment reste dans l'ouvert.

4) Théorème de Poincaré (admis)
   Sur un ouvert étoilé, toute forme différentielle fermée est exacte.