# Mineure « AUTOMATIQUE »

Asservissement et régulation des **S**ystèmes **L**inéaires **C**ontinus et **I**nvariants

# Modélisation des systèmes linéaires et asservis

# Systèmes linéaires continus invariants

**Définition :** *Un système linéaire est un système pour lequel les relations entre les grandeurs d'entrée et de sortie peuvent se mettre sous la forme d'un ensemble d'équations différentielles à coefficients. Les systèmes linéaires possèdent principalement deux propriétés :*

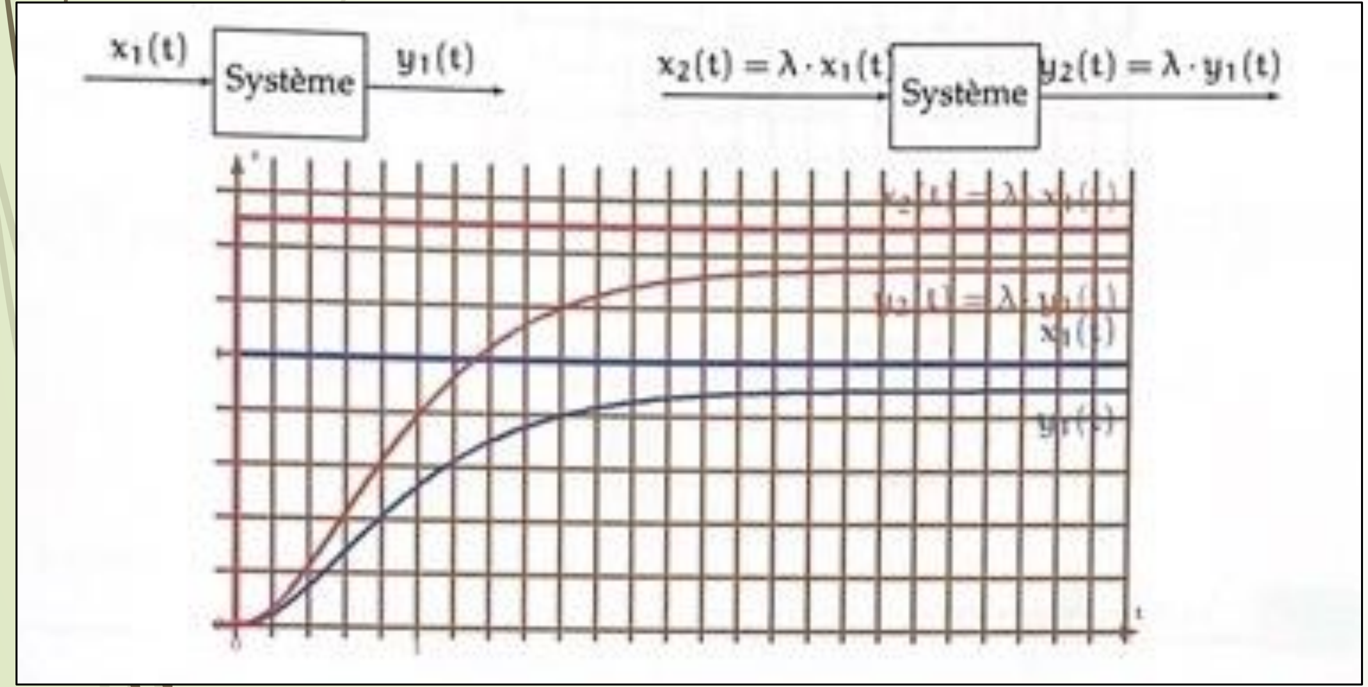
- *La proportionnalité*
- *L'additivité*

*En définitive, étudier un système linéaire revient à étudier la solution de l'équation différentielle à coefficients constants.*

# Propriétés des Systèmes linéaires continus invariants

**Principe de proportionnalité :**

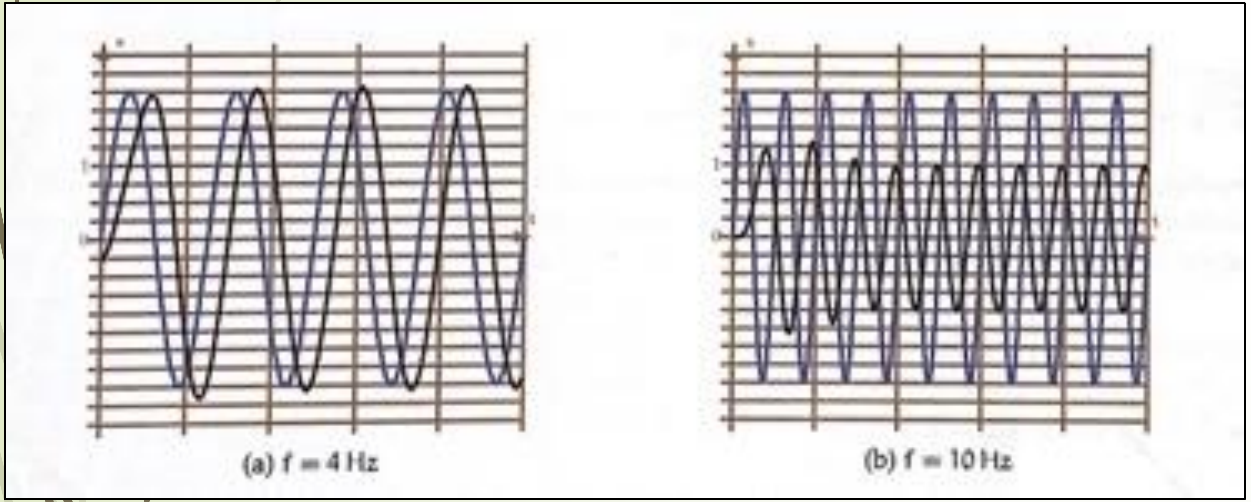
**Définition :** *Si $y(t)$ est la réponse à l'entrée $x(t)$ alors $\lambda \cdot y(t)$ est la réponse à $\lambda \cdot x(t)$.*




- *Dans un système linéaire, l'effet est proportionnel à la cause (cf. figure ci-dessus). L'effet de proportionnalité n'est effectif que lorsque le système a atteint sa position d'équilibre ou que le régime permanent s'est établi.*
- *La caractéristique entrée/sortie d'un système d'un système linéaire est une droite dont la pente est appelée **gain** du système.*

# Propriétés des Systèmes linéaires continus invariants

***Principe de proportionnalité :***

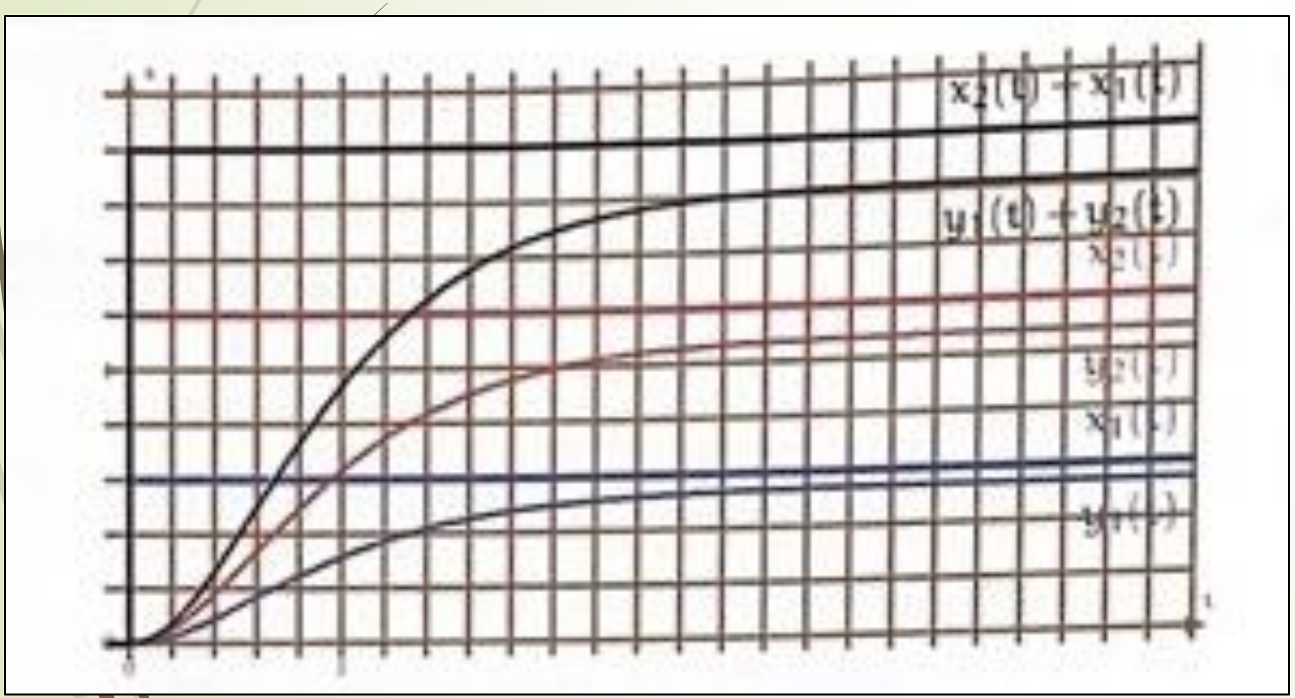



*La réponse en régime définitif (c-à-d en régime permanent) d'un système linéaire à une entrée donnée est un signal de même nature que l'entrée. Sur la figure ci-contre, on constate que la réponse en régime établi à une entrée sinusoïdale de fréquence « $f$ » est aussi une sinusoïde de même fréquence mais déphasée et avec une amplitude différente.*

# Propriétés des Systèmes linéaires continus invariants

## <u>***Principe de superposition :***</u>

***Définition :*** *Si $y_1(t)$ est la réponse à l'entrée $x_1(t)$ et $y_2(t)$ est la réponse à l'entrée $x_2(t)$ alors, $y_1(t) + y_2(t)$ est la réponse à l'entrée de $x_1(t) + x_2(t)$ (cf. figure ci-dessous).*




- *Les principes de proportionnalités et de superposition vont nous permettre, connaissant la réponse d'un système à des sollicitations simples de déterminer par additivité et proportionnalité la réponse à des sollicitations plus complexes.*

# Propriétés des Systèmes linéaires continus invariants

**Systèmes continus :**

*Un système est dit continu lorsque les grandeurs physiques qui le caractérisent, évoluent de manière continue en fonction du temps.*

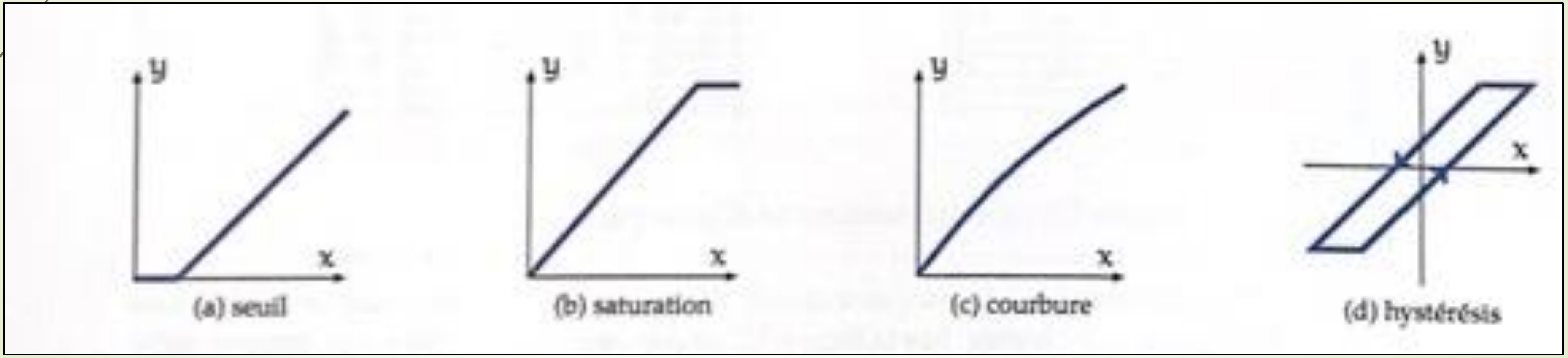
*on oppose les systèmes continus aux systèmes discrets et aux systèmes numériques pour lesquels l'évolution d'un état à un autre se fait par « saut » d'une valeur à la suivante.*

**Systèmes invariants :**

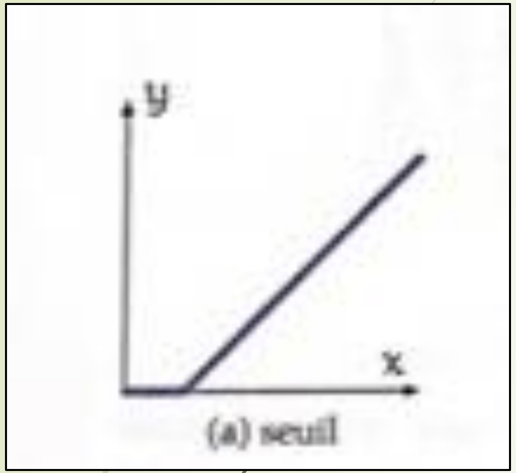
*On dit qu'un système est invariant lorsque les caractéristiques du système ne se modifient pas dans le temps.*

# Principales non-linéarités

*Les systèmes réels ne sont ni linéaires, ni continus, ni invariants. Mais il est en général souvent possible de modéliser correctement le système afin que celui-ci puisse être considéré comme linéaire, continu et invariant dans la zone d'étude.*



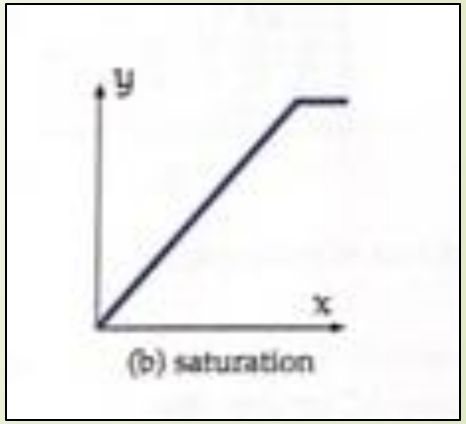
# Principales non-linéarités



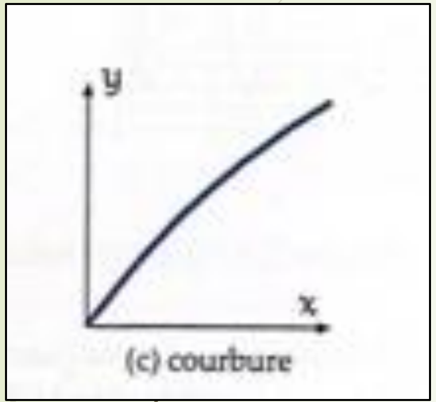

***Seuil :*** *un système présente un seuil si la sortie n'évolue que lorsque l'entrée dépasse une valeur minimale (seuil). Les seuils ont souvent pour origine des frottements secs.*

***Saturation :*** *un système présente une saturation lorsque la sortie n'évolue plus au-delà d'une valeur limite.*

*Ces saturations sont dues soit aux limites mécaniques du systèmes (butées) soit aux limites des interfaces de puissance (saturation des amplificateurs opérationnels).*

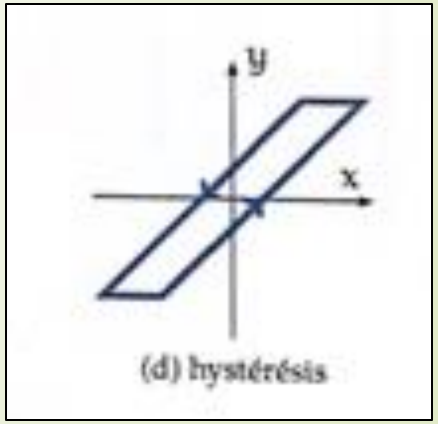


# Principales non-linéarités




***Courbure :*** *la quasi-totalité des systèmes présente des courbures plus ou moins prononcées.*
*Dans la plupart des cas le système est approché par une droite passant par l'origine, mais il est aussi possible de linéariser autour d'un point de fonctionnement.*

***Hystérésis :*** *Un système présente une réponse avec une hystérésis lorsque le comportement est différent suivant le sens d'évolution de la variable d'entrée.*



# Etude des systèmes linéaires

*L'étude et la caractérisation des systèmes linéaires ne passent pas obligatoirement par la résolution de l'équation différentielle surtout qu'il n'est pas toujours possible de résoudre celle-ci.*

*Nous allons voir dans un premier temps les principes de résolution des équations différentielles avec les outils mathématiques classiques puis en utilisant la* ***transformation de Laplace*** *qui permet de travailler dans un espace dans lequel les équations différentielles sont représentées par des polynômes.*

# Description par les équations différentielles

Un système dynamique linéaire peut-être décrit par une équation différentielle à coefficients constants liant les grandeurs d'entrées et de sortie.

L'équation générale d'un système linéaire est de la forme :

$$b_m \frac{d^m y(t)}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} y(t)}{dt^{m-1}} + \dots + b_1 \frac{dy(t)}{dt} + b_0 . y(t) = a_n \frac{d^n x(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} x(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dx(t)}{dt} + a_0 . x(t)$$

On note :

$\frac{dy(t)}{dt} = \dot{y}(t)$ dérivée 1ère de $y(t)$ par rapport au temps

$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} = \ddot{y}(t)$ dérivée 2nd de $y(t)$ par rapport au temps

$\frac{d^n y(t)}{dt^n}$ dérivée nème de $y(t)$ par rapport au temps

Pour les systèmes réels :

« $\boldsymbol{m \geq n}$ »

(principe de causalité : la cause précède toujours l'effet)

A partir de cette représentation il est possible de déterminer l'évolution temporelle de la sortie en résolvant l'équation différentielle.

## Description par les équations différentielles

*On constate que mathématiquement on pourra étudier le comportement d'un système linéaire à partir de la réponse temporelle. Mais cette méthode est très peu utilisée en automatique, on préfère utiliser une autre méthode, la transformation de* ***Laplace****.*

# Utilité du domaine de Laplace

# Description par la transformation de Laplace

*L'utilisation de la transformée de Laplace pour la résolution des équations différentielles a été développée par Heaviside. Nous allons, en préalable à cette partie, nous intéresser à la transformation de Laplace.*

## ***Transformation de Laplace***

**Définition :** *Soit une fonction de la variable réelle « $t$ » définie sur $\mathbb{R}$ et supposée nulle pour $t < 0$, on appelle transformée de Laplace de « f », la fonction « F » définie par :*

$$F(p) = \int_0^{+\infty} e^{-p \cdot t} f(t).dt$$

*Avec « p » une variable réelle ou complexe.*

*On note :*

$$F(p) = \mathcal{L}(f(t))$$

*Avec $F(p)$ la transformée de Laplace de $f(t)$*

# Description par la transformation de Laplace

## *Transformation de Laplace*

***Remarque :*** *en France, on utilise préférentiellement la variable « p » mais les pays anglo-saxons utilisent plutôt la variable « s ». Il est d'usage de noter les transformées de Laplace par une lettre majuscule.*

*En automatique, on n'utilise que la transformée de Laplace restreinte qui ne s'applique qu'aux fonctions causales (c-à-d aux fonctions $f(t)$ telles que : $f(t) = 0$ pour $t < 0$).*

*Pour transformer une fonction quelconque en fonction causale, on la combine avec la fonction existence, appelé aussi fonction Heaviside noté $\mathcal{H}(t)$ et définie par :* $\begin{cases} t < 0 : \mathcal{H}(t) = 0 \\ t \geq 0 : \mathcal{H}(t) = 1 \end{cases}$

# Description par la transformation de Laplace

**Propriétés de le transformation de Laplace**

*Les trois premières propriétés sont évidentes et déduites des propriétés de l'exponentielle et de l'intégrale .*

***Unicité :*** *à une fonction temporelle f(t), il correspond une transformée de Laplace F(p) unique et réciproquement.*

***Additivité*** *:*

$$\mathcal{L}\big(f(t)+g(t)\big)=\mathcal{L}\big(f(t)\big)+\mathcal{L}\big(g(t)\big)=F(p)+G(p)$$

***Linéarité*** *:*

$$\mathcal{L}\big(a\cdot f(t)+b\cdot g(t)\big)=a\cdot\mathcal{L}\big(f(t)\big)+b\cdot\mathcal{L}\big(g(t)\big)=a\cdot F(p)+b\cdot G(p)$$

GROUPE INP La Prépa

# Description par la transformation de Laplace

## ***Propriétés de le transformation de Laplace***

*Les suivantes sont celles qui justifient l'utilisation des transformées de Laplace dans l'étude des systèmes linéaires.*

***Dérivation :***

- Dérivée première :

$$\mathcal{L}\left(\frac{df(t)}{dt}\right) = p \cdot F(p) - f(0)$$

- Dérivée seconde :

$$\mathcal{L}\left(\frac{d^2f(t)}{dt^2}\right) = p^2 \cdot F(p) - p \cdot f(0) - \dot{f}(0)$$

# Description par la transformation de Laplace

***<u>Propriétés de le transformation de Laplace</u>***

*Si le système est dans les conditions de Heaviside, c'est-à-dire f(0)=0, $\dot{f}(0^{+}) = 0$ et toutes les dérivées en 0 sont nulles, alors :*

- *Dérivée première :*

$$\mathcal{L}\left(\frac{df(t)}{dt}\right) = p \cdot F(p)$$

- *Dérivée seconde :*

$$\mathcal{L}\left(\frac{d^2f(t)}{dt^2}\right) = p^2 \cdot F(p)$$

***Dans les conditions de Heaviside, dériver dans le domaine temporel revient à multiplier par « p » dans le domaine symbolique (domaine de Laplace).***

# Description par la transformation de Laplace

## ***<u>Propriétés de le transformation de Laplace</u>***

***Intégration :***

$$\mathcal{L}\left(\int_0^t f(x)dx\right) = \frac{F(p)}{p} + \frac{A_0}{p}$$

en posant : $g(t) = \int_0^t f(x)dx$ et $g(0^+) = A_0$

*Dans les conditions de Heaviside ($g(0^+)$)=0) cette relation devient :*

$$\mathcal{L}\left(\int_0^t f(x)dx\right) = \frac{F(p)}{p}$$

***Dans les conditions de Heaviside, intégrer dans le domaine temporel revient à diviser par « p » dans le domaine symbolique (domaine de Laplace).***

# Description par la transformation de Laplace

**_Propriétés de le transformation de Laplace_**

***Théorème de la valeur finale :***

*Si la fonction f(t) est une fonction convergente (elle possède une limite) alors :*

$$\lim_{t \to \infty} f(t) = \lim_{p \to 0} p \cdot F(p)$$

***Théorème de la valeur initiale :***

*Si la fonction f(t) possède une limite en 0, alors :*

$$\lim_{t \to 0} f(t) = \lim_{p \to +\infty} p \cdot F(p)$$

***Théorème du retard :***

$$\mathcal{L}(f(t-\tau) = e^{-\tau \cdot p} \cdot F(p)$$

# Description par la transformation de Laplace

**_Transformées de signaux élémentaires_**

*Nous aurons souvent besoin de déterminer le comportement d'un système linéaire sollicité par un signal caractéristique.*

**Echelon :** $f(t) = A \cdot \mathcal{H}(t)$ **:** *A une constante et $\mathcal{H}(t)$ la fonction de Heaviside.*

$$F(p) = \int_0^{+\infty} e^{-p \cdot t} f(t) dt$$

$$F(p) = \int_0^{+\infty} e^{-p \cdot t} A \cdot \mathcal{H}(t) dt$$

$$F(p) = \left[\frac{-A}{p} \cdot e^{-p \cdot t}\right]_0^{+\infty} = \frac{A}{p}$$

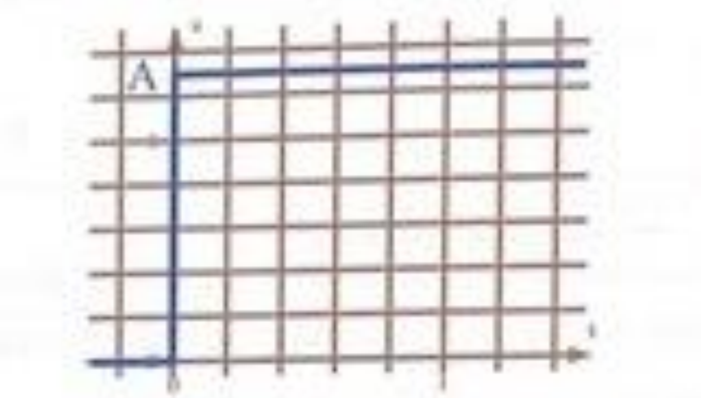



Figure 3.6 – Échelon d'amplitude A

# Description par la transformation de Laplace

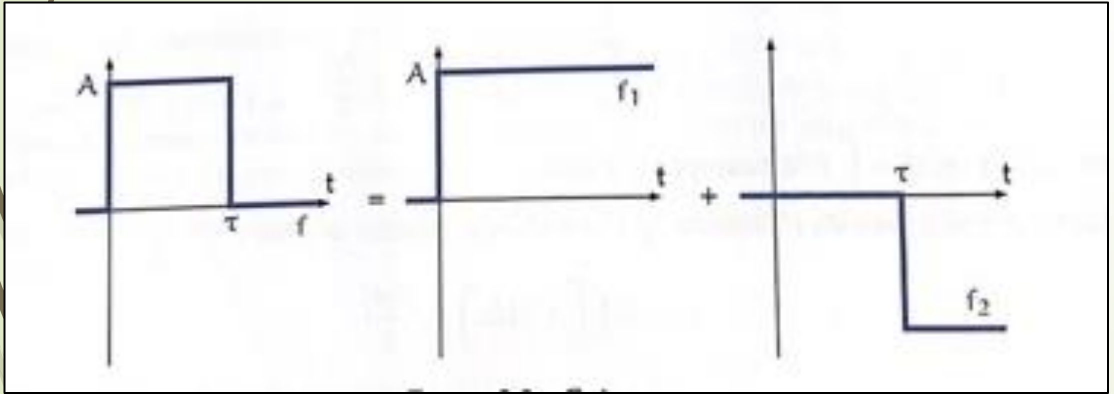
## ***Transformées de signaux élémentaires***

**Créneau :** *Pour déterminer la transformée de ce signal, on le décompose en deux fonctions :*

$f_1(t)$ *est une fonction échelon et* $f_2$ *(t) est une fonction échelon retardée d'amplitude opposée à celle de* $f_2(t)$ *, on a donc* $f_2(t) = -f_1(t-\tau)$

$f(t) = f_1(t) + f_2(t)$

$f(t) = f_1(t) + -f_1(t-\tau)$



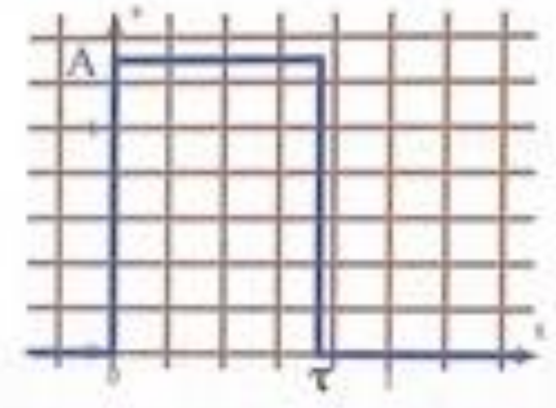



Figure 3.7 – Créneau

# Description par la transformation de Laplace

***Transformées de signaux élémentaires***

**Créneau :** *On peut donc déduire, à partir de la transformée de Laplace d'un échelon et du théorème du retard la transformée d'un créneau :*

$$\mathcal{L}\left(f(t)\right) = \mathcal{L}\left(f_1(t) - \mathcal{L}\, f_1(t-\tau)\right) = \mathcal{L}\left(f_1(t)\right) - \mathcal{L}\left(f_1(t-\tau)\right)$$

$$\mathcal{L}\left(f(t)\right) = \frac{A}{P} - \frac{A \cdot e^{-\tau \cdot p}}{p} = \frac{A}{p}\left(1 - e^{-\tau \cdot p}\right)$$

# Description par la transformation de Laplace

## Transformées de signaux élémentaires

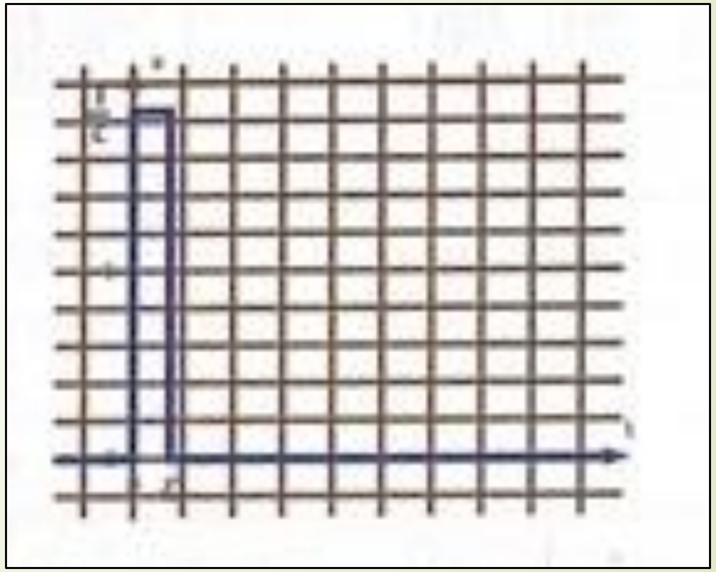
**Impulsion de Dirac :** *l'impulsion de Dirac est définie par* $: \forall t \neq 0$ *, et* $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)dt = 1$ .

*Pour réaliser le calcul de la transformée, on modélise la fonction de Dirac par :*

$$\begin{cases} 0 < t < \varepsilon. & \delta(t) = \frac{1}{\varepsilon} \\ Sinon, & \delta(t) = 0 \end{cases}$$

L'impulsion de Dirac est obtenue en faisant tendre « $\varepsilon$ » vers 0.

*On peut reprendre le résultat du calcul de la transformée du créneau en posant* $A = \frac{1}{\varepsilon}$ *et en faisant tendre* $\varepsilon$ *vers 0.*



# Description par la transformation de Laplace

**_Transformées de signaux élémentaires_**

**Impulsion de Dirac :** *On peut reprendre le résultat du calcul de la transformée du créneau (signal précédemment étudier) en posant* $A = \frac{1}{\varepsilon}$ *et en faisant tendre* $\varepsilon$ *vers 0.*

$$\mathcal{L}\big(\delta(t)\big) = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon \cdot p}\left(1 - e^{-\varepsilon \cdot p}\right)$$

*A partir du développement au premier ordre de l'exponentielle :* $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + o(x)$

$$\mathcal{L}\big(\delta(t)\big) = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon \cdot p}\big(1 - (1 + \varepsilon \cdot p)\big) = 1$$

# Description par la transformation de Laplace

## *Transformées de signaux élémentaires*

**Rampe:** $f(t) = A \cdot t \cdot \mathcal{H}(t)$ *avec $\mathcal{H}(t)$ la fonction de Heaviside*

$$F(p) = \int_0^{+\infty} e^{-p\cdot t} f(t)dt$$

$$F(p) = \int_0^{+\infty} e^{-p\cdot t} A \cdot t \cdot \mathcal{H}(t)dt$$

Pour résoudre, il faut utiliser l'intégration par parties[4] soit : $\int_a^b u \cdot \dot{v} dt = [u \cdot v]_a^b - \int_a^b \dot{u} \cdot v dt$

avec ici $\begin{cases} u(t) = t, & \dot{v}(t) = e^{-p\cdot t} \\ \dot{u}(t) = 1, & v(t) = -\dfrac{e^{-p\cdot t}}{p} \end{cases}$

Donc :

$$F(p) = \int_0^{+\infty} e^{-p\cdot t} A \cdot t \cdot \mathcal{H}(t)d(t)$$

$$F(p) = A \cdot \left[t \cdot \frac{-e^{-p\cdot t}}{p}\right]_0^{+\infty} - A \cdot \int_0^{+\infty} \frac{-e^{-p\cdot t}}{p} dt$$

$$F(p) = 0 + A \cdot \left[\frac{-e^{-p\cdot t}}{p^2}\right] = \frac{A}{p^2}$$

# Description par la transformation de Laplace

## ***Transformées de signaux élémentaires***

**Tableau des transformées:** *En synthèse, il est très peu probable que l'on doive réaliser le calcul d'une transformée de Laplace. Dans la majorité des cas, la fonction à étudier est une fonction connue dont la transformée a déjà été calculée, ses fonctions sont précisées dans les tableaux suivants. Ils sont utilisés aussi bien pour déterminer la transformée que la transformée inverse.*

*Dans les tableaux, $\mathcal{H}(t)$ représente la fonction échelon unitaire de Heaviside et $\delta(t)$ l'impulsion de Dirac.*

**Transformées usuelles**

| $f(t)\cdot\mathcal{H}(t)$ | $F(p)$ | $f(t)\cdot\mathcal{H}(t)$ | $F(p)$ |
|---|---|---|---|
| $\delta(t)$ | $1$ | $(1-e^{-\frac{t}{\tau}})\cdot\mathcal{H}(t)$ | $\frac{1}{p(1+\tau.p)}$ |
| $\delta(t-\tau)$ | $e^{-\tau\cdot p}$ | $e^{-a.t}\cdot t^n\cdot\mathcal{H}(t)$ | $\frac{n!}{(p+a)^{n+1}}$ |
| $a\cdot\mathcal{H}(t)$ | $\frac{a}{p}$ | $\sin(\omega\cdot t)\cdot\mathcal{H}(t)$ | $\frac{\omega}{p^2+\omega^2}$ |
| $a\cdot\mathcal{H}(t-\tau)$ | $\frac{a}{p}\cdot e^{-\tau\cdot p}$ | $\cos(\omega\cdot t)\cdot\mathcal{H}(t)$ | $\frac{p}{p^2+\omega^2}$ |
| $a\cdot t\cdot\mathcal{H}(t)$ | $\frac{a}{p^2}$ | $e^{-a\cdot t}\cdot\sin(\omega\cdot t)\cdot\mathcal{H}(t)$ | $\frac{\omega}{\omega^2+(p+a)^2}$ |
| $t^n\cdot\mathcal{H}(t)$ | $\frac{n!}{p^{n+1}}$ | $e^{-a\cdot t}\cdot\cos(\omega\cdot t)\cdot\mathcal{H}(t)$ | $\frac{p}{\omega^2+(p+a)^2}$ |
| $e^{-a\cdot t}\cdot\mathcal{H}(t)$ | $\frac{1}{p+a}$ | $\frac{e^{\omega t}-e^{-\omega t}}{2}\cdot\mathcal{H}(t)$ | $\frac{\omega}{p^2-\omega^2}$ |
| $\frac{1-e^{-a\cdot t}}{a}\cdot\mathcal{H}(t)$ | $\frac{1}{p\cdot(p+a)}$ | $\frac{e^{\omega t}+e^{-\omega t}}{2}\cdot\mathcal{H}(t)$ | $\frac{p}{p^2-\omega^2}$ |

**Transformées des systèmes du 1er et du 2d ordre**

| $f(t)\cdot\mathcal{H}(t)$ | $F(p)$ |
|---|---|
| $\frac{1}{\tau}\cdot e^{-\frac{t}{\tau}}\cdot\mathcal{H}(t)$ | $\frac{1}{1+\tau\cdot p}$ |
| $\left(1-e^{-\frac{t}{\tau}}\right)\cdot\mathcal{H}(t)$ | $\frac{1}{p\cdot(1+\tau\cdot p)}$ |
| $\left(t-\tau\cdot\left(1-\cdot e^{-\frac{t}{\tau}}\right)\right)\cdot\mathcal{H}(t)$ | $\frac{1}{p^2\cdot(1+\tau\cdot p)}$ |
| $t\cdot\frac{e^{-\frac{t}{\tau}}}{\tau^2}\cdot\mathcal{H}(t)$ | $\frac{1}{(1+\tau\cdot p)^2}$ |
| $\left(1-(t+\tau)\cdot\frac{e^{-\frac{t}{\tau}}}{\tau^2}\right)\cdot\mathcal{H}(t)$ | $\frac{1}{p\cdot(1+\tau\cdot p)^2}$ |
| $\frac{1}{(\tau_1-\tau_2)}\cdot\left(e^{-\frac{t}{\tau_1}}-e^{-\frac{t}{\tau_2}}\right)\cdot\mathcal{H}(t)$ | $\frac{1}{(1+\tau_1 p)(1+\tau_2 p)}$ |
| $\left(1+\frac{1}{(\tau_1-\tau_2)}\cdot\left(\tau_1.e^{-\frac{t}{\tau_1}}-\tau_2.e^{-\frac{t}{\tau_2}}\right)\right)\cdot\mathcal{H}(t)$ | $\frac{1}{p.(1+\tau_1 p)(1+\tau_2 p)}$ |
| $\frac{1}{\omega_0\cdot\sqrt{1-z^2}}e^{-z\omega_0 t}\cdot\sin\left(\omega_0\sqrt{1-z^2}.t\right)\cdot\mathcal{H}(t)$ | $\frac{1}{\omega_0{}^2+2\cdot z\cdot\omega_0\cdot p+p^2}$ avec $z<1$ |
| $\frac{1}{\omega_0^2}\left(1-\frac{1}{\sqrt{1-z^2}}e^{-z\omega_0 t}\cdot\sin\left(\omega_0\sqrt{1-z^2}\cdot t+\varphi\right)\right)\cdot\mathcal{H}(t)$ et $\varphi=\arccos z$ | $\frac{1}{p\,(\omega_0{}^2+2\cdot z\cdot\omega_0\cdot p+p^2)}$ avec $z<1$ |

# Description par la transformation de Laplace

***<u>Transformées de signaux élémentaires</u>***

***<u>Transformées inverses :</u>*** *Soit* $F(p) = \mathcal{L}\,(f(t))$ *la transformée de Laplace d'une fonction* $f(t)$*. On appelle transformée de Laplace inverse, ou originale, de* $F(p)$ *la fonction* $f(t)$*. On note:*

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}(F(p))$$

*La transformée de Laplace inverse consiste à rechercher la fonction temporelle qui correspond à une fonction F(p) donnée. La résolution analytique de la transformée n'est pas au programme. La détermination de la transformée ne se fait qu'à partir du tableau des transformées.*

*Lorsque la fonction F(p) est dans le tableau on obtient directement l'original f(t). Dans le cas contraire, on décomposera la fonction pour faire apparaître des formes connues de fonctions de Laplace.*

*Les fonctions de Laplace dont il faut déterminer la transformée inverse sont généralement des fractions rationnelles de la forme :*

$$H(p) = K' \cdot \frac{1}{p^{\alpha}} \cdot \frac{1+a_1 \cdot p+a_2 \cdot p^2+\cdots+a_m \cdot p^m}{1+b_1 \cdot p+b_2 \cdot p^2+\cdots+b_m \cdot p^m} \quad \text{avec} \propto +m \geq n$$

# Description par la transformation de Laplace

## ***Transformées de signaux élémentaires***

***Transformées inverses :***

$$H(p) = K' \cdot \frac{1}{p^{\alpha}} \cdot \frac{1+a_1 \cdot p+a_2 \cdot p^2+\cdots+a_m \cdot p^m}{1+b_1 \cdot p+b_2 \cdot p^2+\cdots+b_n \cdot p^n} \quad \text{avec } \propto +m \geq n$$

*Hormis pour quelques formes simples, on ne connait pas la transformée inverse.*

*On sait qu'il est toujours possible d'écrire toute fraction rationnelle sous la forme d'une somme de fractions élémentaires à partir d'une décomposition en éléments simples.*

# Description par la transformation de Laplace

***Racines réelles simples :***

*Si la fonction de transfert ne présente que des pôles réels simple, la décomposition s'écrit comme la somme des fractions simples de chaque pôle.*

$$F(p) = \frac{p+2}{P^2 + 15 \cdot P + 50} = \frac{p+2}{(P+5) \cdot (p+10)}$$

*Sa décomposition en fractions simples est donc de la forme suivante :*

$$F(p) = \frac{A}{p+5} + \frac{B}{p+10}$$

*Par identification on trouve :*

$$\frac{p+2}{(p+5) \cdot (p+10)} = \frac{A}{p+5} + \frac{B}{p+10}$$

# Description par la transformation de Laplace

## Racines réelles simples :

*Par identification on trouve :*

$$\frac{p+2}{(p+5)\cdot(p+10)} = \frac{A}{p+5} + \frac{B}{p+10}$$

$$\frac{p+2}{(p+5)\cdot(p+10)} = \frac{p\cdot(A+B)+10\cdot A+5\cdot B}{(p+5)\cdot(p+10)}$$

$$\begin{cases} A = -\dfrac{3}{5} \\ B = \dfrac{8}{5} \end{cases}$$

*Soit :*

$$F(p) = -\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{p+5} + \frac{8}{5}\cdot\frac{1}{p+10}$$

# Description par la transformation de Laplace

**Racines réelles simples :**

*La transformée inverse de ces deux fractions simples est déduite directement à partir du tableau des transformées :*

$$\frac{1}{p+a} \xrightarrow{\mathcal{L}} e^{-a \cdot t} \cdot \mathcal{H}(t)$$

*D'où :*

$$f(t) = (-\frac{3}{5} \cdot e^{-5 \cdot t} + \frac{8}{5} \cdot e^{-10 \cdot t}) \cdot \mathcal{H}(t)$$

# Description par la transformation de Laplace

**Racines réelles multiples :**

*Dans le cas de racines réelles multiples, la décomposition en fractions simples de la racine multiple est la somme des fractions simples des puissances décroissantes.*

*Pour*

$$F(p) = \frac{p+2}{P^3 + 20 \cdot p^2 + 125 \cdot p + 250} = \frac{p+2}{(p+5)^2 \cdot (p+10)}$$

*La décomposition en fractions simples s'écrit :*

$$F(p) = \frac{A}{(p+5)^2} + \frac{B}{(p+5)} + \frac{C}{(p+10)}$$

# Description par la transformation de Laplace

## Racines réelles multiples :

*Une autre méthode pour déterminer les coefficients est d'isoler le coefficient que l'on cherche. Pour cela, on multiplie la fonction de transfert des deux côtés de l'égalité par le polynôme de la racine concernée. On calcule ensuite, pour le pôle concerné la valeur de cette égalité.*

$$\frac{p+2}{(p+5)^2 \cdot (p+10)} = \frac{A}{(p+5)^2} + \frac{B}{(p+5)} + \frac{C}{(p+10)}$$

*Ainsi pour « A » :*

$$(p+5)^2 \cdot \frac{p+2}{(p+5)^2 \cdot (p+10)} = (p+5)^2 \cdot \frac{A}{(p+5)^2} + (p+5)^2 \cdot \frac{B}{(p+5)} + (p+5)^2 \cdot \frac{C}{(p+10)}$$

$$\frac{p+2}{(p+10)} = A + (p+5) \cdot B + (P+5)^2 \cdot \frac{C}{(p+10)}$$

*On pose ensuite p=-5, les deux derniers termes sont nuls et il reste :*

$$\frac{-5+2}{(-5+10)} = A = -\frac{3}{5}$$

# Description par la transformation de Laplace

***Racines réelles multiples :***

*Le coefficient C est déterminé de la même manière :*

$$\frac{p+2}{(p+5)^2 \cdot (p+10)} = \frac{A}{(p+5)^2} + \frac{B}{(p+5)} + \frac{C}{(p+10)}$$

$$\frac{(p+10)\cdot(p+2)}{(p+5)^2 \cdot (p+10)} = \frac{A\cdot(p+10)}{(p+5)^2} + \frac{B\cdot(p+10)}{(p+5)} + C$$

*On pose ensuite p=-10, les deux premiers termes sont nuls et il reste :*

$$\frac{(-10+2)}{(-10+5)^2} = C = -\frac{8}{25}$$

## Description par la transformation de Laplace

***Racines réelles multiples :***

*Le coefficient B ne peut pas être déterminé par cette méthode, on peut soit finir par identification soit en prenant une valeur particulière pour « p », ici la valeur la plus simple est p=0.*

$$\frac{p+2}{(p+5)^2\cdot(p+10)} = -\frac{3}{5\cdot(p+5)^2} + \frac{B}{(p+5)} - \frac{8}{25\cdot(p+10)}$$

$$\frac{0+2}{(0+5)^2\cdot(0+10)} = -\frac{3}{5\cdot(0+5)^2} + \frac{B}{(0+5)} - \frac{8}{25\cdot(0+10)}$$

*Soit :*

$$B = \frac{2}{25}$$

# Description par la transformation de Laplace

## Racines réelles multiples :

*Ce qui nous donne au final :*

$$F(p) = -\frac{3}{5 \cdot (p+5)^2} + \frac{2}{25 \cdot (p+5)} - \frac{8}{25 \cdot (p+10)}$$

*On trouve dans le tableau des transformées :*

$$\frac{n!}{(p+a)^{n+1}} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} e^{-a \cdot t} \cdot t^n \cdot \mathcal{H}(t)$$

Soit :

$$\frac{1!}{(p+5)^{1+1}} = \frac{1!}{(p+a)^2} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} e^{-5 \cdot t} \cdot t \cdot \mathcal{H}(t)$$

D'où :

$$f(t) = (-\frac{3}{5} \cdot t \cdot e^{-5 \cdot t} + \frac{2}{25} \cdot e^{-5 \cdot t} - \frac{8}{25} \cdot e^{-10 \cdot t}) \cdot \mathcal{H}(t)$$

# Description par la transformation de Laplace

**Racines complexes :**

*Dans le cas de racines complexes conjuguées, il est possible de raisonner comme dans le cas des racines réelles mais cela fait apparaitre des coefficients complexes. Il est préférable de ne travailler qu'avec des coefficients réels, pour cela, on réalisera la décomposition en gardant les polynômes du second ordre au dénominateur.*

*Ainsi :*

$$F(p) = \frac{3}{p \cdot (p^2 + 2 \cdot p + 5)}$$

*Se décompose sous la forme :*

$$F(p) = \frac{A}{p} + \frac{B \cdot p + C}{(p^2 + 2 \cdot p + 5)}$$

# Description par la transformation de Laplace

***Racines complexes :***

Donc :

$$F(p) = \frac{A}{p} + \frac{B \cdot p + C}{(p^2 + 2 \cdot p + 5)}$$

$$F(p) = \frac{A \cdot (p^2 + 2p + 5) + Bp^2 + Cp}{p \cdot (p^2 + 2p + 5)} = \frac{Ap^2 + 2Ap + 5A + Bp^2 + Cp}{p \cdot (p^2 + 2p + 5)} = \frac{p^2 \cdot (A + B) + p \cdot (2A + C) + 5A}{p \cdot (p^2 + 2p + 5)}$$

Par identification :

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ 2A + C = 0 \\ 5A = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = \frac{3}{5} \\ B = -\frac{3}{5} \\ C = -\frac{6}{5} \end{cases}$$

$$F(p) = \frac{3}{5 \cdot p} + \frac{-3 \cdot p - 6}{5 \cdot (p^2 + 2 \cdot p + 5)}$$

# Description par la transformation de Laplace

## Racines complexes :

*Pour déterminer la transformée inverse, il faut mettre le dénominateur du second ordre sous la forme canonique (cf. tableau des transformées) :*

$$F(p) = \frac{3}{5 \cdot p} + \frac{-3 \cdot p - 6}{5 \cdot (p^2 + 2 \cdot p + 5)} = \frac{3}{5 \cdot p} - \frac{3 \cdot p}{2^2 \cdot (p+1)^2} - \frac{6}{2^2 \cdot (p+1)^2}$$

*A partir du tableau des transformées inverses :*

$$\frac{a}{p} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} a \cdot \mathcal{H}(t)$$

$$\frac{\omega}{\omega^2 + (p+a)^2} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} e^{-a \cdot t} \cdot \sin(\omega \cdot t) \cdot \mathcal{H}(t)$$

$$\frac{p}{\omega^2 + (p+a)^2} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} e^{-a \cdot t} \cdot \cos(\omega \cdot t) \cdot \mathcal{H}(t)$$

D'où :

$$\boldsymbol{f(t) = (\frac{3}{5} - \frac{3}{5} \cdot e^{-t} \cdot \cos(2 \cdot t) - \frac{6}{5} \cdot e^{-t} \cdot \sin(2 \cdot t)) \cdot \mathcal{H}(t)}$$

$$\boldsymbol{f(t) = (\frac{3}{5} + e^{-t} \cdot (-\frac{3}{5} \cdot \cos(2 \cdot t) - \frac{6}{5} \cdot \sin(2 \cdot t)) \cdot \mathcal{H}(t)}$$

# Description par la transformation de Laplace

**En conclusion :**

*Lorsque la fonction $F(p)$ est sous la forme d'une fraction rationnelle en « p », la méthode à utiliser est la décomposition en éléments simples puis à rechercher dans le tableau des transformées la fonction temporelle de chaque fraction rationnelle.*

*Pour déterminer les coefficients, on peut soit :*

- *Résoudre par identification,*
- *Déterminer les coefficients en utilisant la valeur de la fonction pour des valeurs particulières,*
- *Déterminer les coefficients après les avoir isolés.*

*La transformée inverse de $F(p)$ est une somme des transformées inverses de chaque fonction élémentaire.*

# Utilisation pour la résolution d'équations différentielles

La transformation de Laplace permet de ramener l'étude des équations différentielles dans le domaine temporel, à une étude d'un polynôme dans le domaine symbolique.

Soit l'équation différentielle du deuxième ordre à coefficients constants avec un second membre.

$$b_2 \frac{d^2\, s(t)}{dt^2} + b_1 \frac{d\, s(t)}{dt} + b_0 \cdot s(t) = e(t)$$

On considère que les conditions initiales sont nulles pour $s(t)$ et ses dérivées. Si ce n'est pas le cas, en général un simple changement de variable permet de se placer dans le cas de conditions initiales nulles.

On pose : $E(p) = \mathcal{L}\big(e(t)\big)$ $et$ $S(p) = \mathcal{L}\big(s(t)\big)$.

On en déduit : $\mathcal{L}\left(\frac{d\, s(t)}{dt}\right) = p \cdot S(p)$ $\quad et \quad$ $\mathcal{L}\left(\frac{d^2\, s(t)}{dt^2}\right) = p^2 \cdot S(p)$.

# Utilisation pour la résolution d'équations différentielles

$$b_2 \frac{d^2\, s(t)}{dt^2} + b_1 \frac{d\, s(t)}{dt} + b_0 \cdot s(t) = e(t)$$

*En substituant :*

$$b_2(p^2 \cdot S(p) + b_1\big(p \cdot S(p)\big) + b_0\big(S(p)\big) = E(p)$$

$$(b_2 \cdot p^2 + b_1 \cdot p + b_0) \cdot S(p) = E(p)$$

*Ce qui nous permet d'écrire la fraction rationnelle suivante :*

$$S(p) = \frac{1}{b_2 \cdot p^2 + b_1 \cdot p + b_0} \cdot E(p)$$

*La transformation de Laplace transforme l'équation différentielle en une équation algébrique. La réponse temporelle est obtenue en recherchant la transformée inverse de la fraction rationnelle.*

# Utilisation pour la résolution d'équations différentielles

*Ce résultat est important, il permet de montrer que dans le domaine symbolique, la sortie (la solution de l'équation différentielle) s'obtient comme le produit de :*

- *La transformée de Laplace du signal d'entrée :* $E(p) = \mathcal{L}(e(t))$
- *Et d'une fraction rationnelle*

*On appelle* $H(p)$ *la* ***fonction de transfert*** *du système linéaire :*

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)}$$

*On utilise pour représenter le système, une représentation graphique, le* ***schéma bloc*** *:*

$$E(p) \longrightarrow \boxed{\frac{1}{b_2 \cdot p^2 + b_1 \cdot p + b_0}} \longrightarrow S(p)$$

## Utilisation pour la résolution d'équations différentielles

*La réponse temporelle est obtenue en recherchant la transformée inverse du produit de la fraction rationnelle et de l'entrée.*

*Il faut encore préciser l'entrée $e(t)$ et sa transformée de Laplace, ainsi si :*

- *L'entrée est un échelon* $e(t) = E_0 \cdot \mathcal{H}(t)$ *alors* $E(p) = \frac{E_0}{p}$

$$S(p) = \frac{1}{b_2 \cdot p^2 + b_1 \cdot p + b_0} \cdot \frac{E_0}{p}$$

- *L'entrée est une rampe* $e(t) = a \cdot t \cdot \mathcal{H}(t)$ *alors* $E(p) = \frac{a}{p^2}$

$$S(p) = \frac{1}{b_2 \cdot p^2 + b_1 \cdot p + b_0} \cdot \frac{a}{p^2}$$

- *L'entrée est une sinusoïdale* $e(t) = A_0 \cdot \sin(\omega_t)$ *alors* $E(p) = \frac{\omega}{p^2+\omega^2}$

$$S(p) = \frac{1}{b_2 \cdot p^2 + b_1 \cdot p + b_0} \cdot \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$$

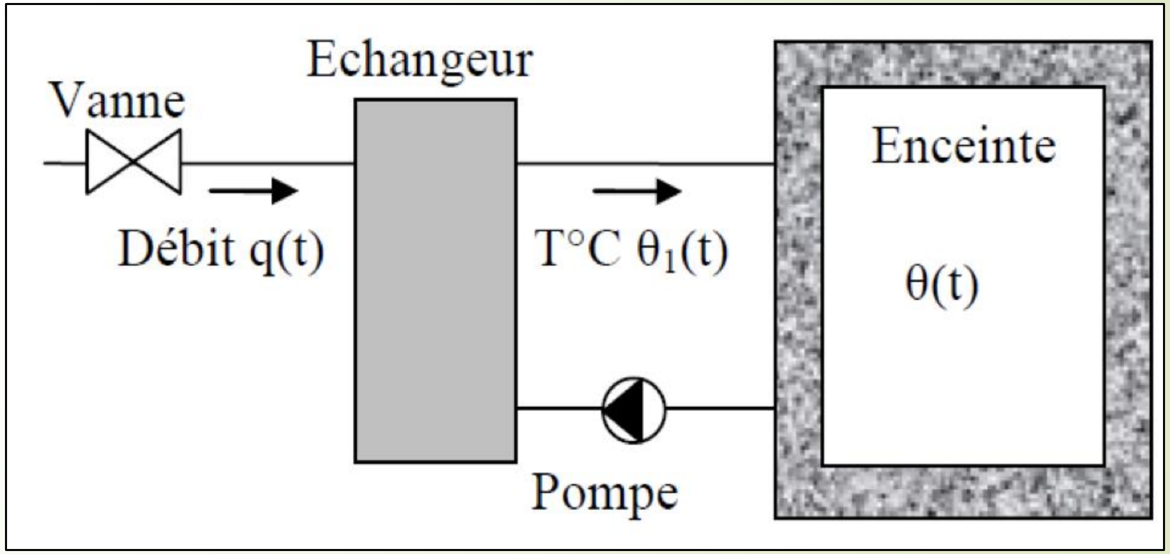
## Exemple : Enceinte chauffée – transformation de Laplace

*On constate sur ces deux exemples que $S(p)$ est une fraction rationnelle qu'il suffit de décomposer pour obtenir la transformée inverse.*

*<u>Nous allons le montrer sur un exemple :</u>*

*Le système représenté ci-contre est chargé de maintenir la température d'une enceinte. Le chauffage est assuré par un échangeur thermique, la vanne « V », permet de réguler le débit du fluide calorifique dans l'échangeur. On note :*

- $\alpha(t)$ *: l'angle d'ouverture de la vanne*
- $q(t)$ *: débit de l'échangeur*
- $\theta_1(t)$ *: température en sortie de l'échangeur*
- $\theta(t)$ *: température dans l'enceinte*



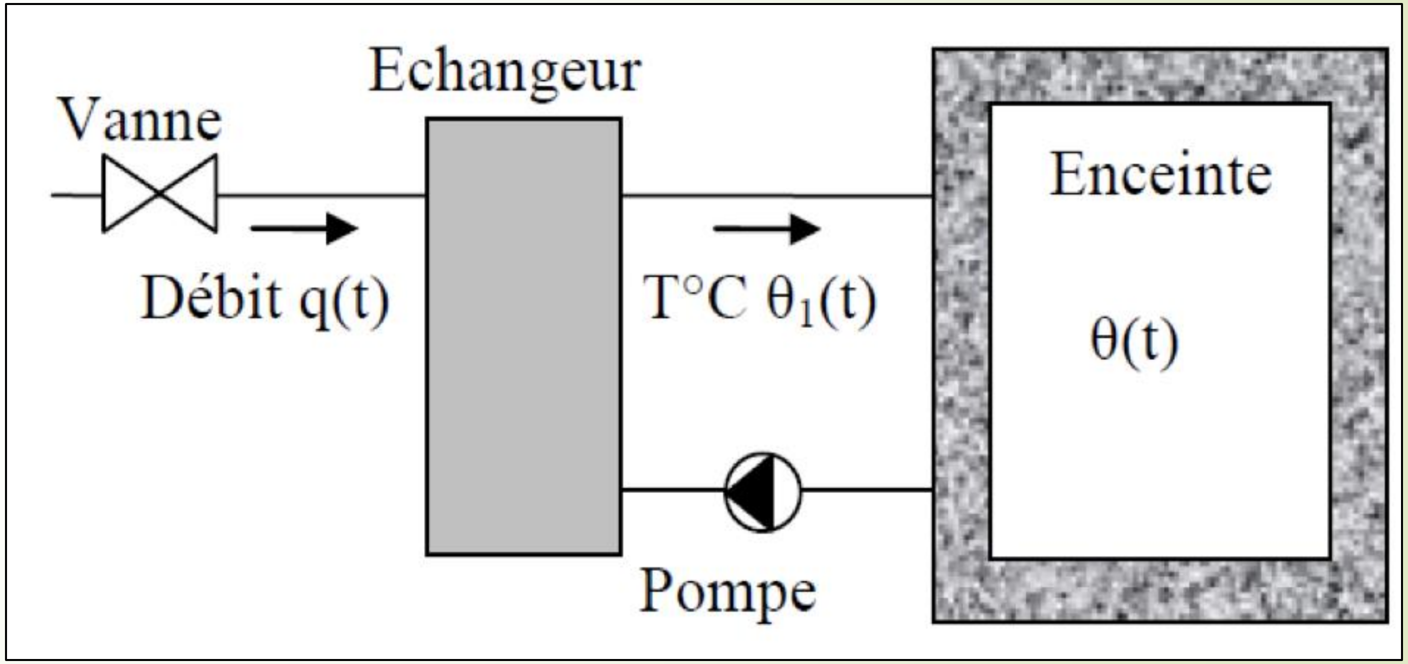
## Exemple : Enceinte chauffée – transformation de Laplace

*<u>Les équations qui décrivent le comportement sont :</u>*

$$q(t) = k_0 \cdot \alpha(t)$$

$$\theta_1(t) + \tau_1 \cdot \frac{d\theta_1(t)}{dt} = k_1 \cdot q(t)$$

$$\theta(t) + \tau_2 \cdot \frac{d\theta_1(t)}{dt} = k_2 \cdot \theta_1(t)$$



## Exemple : Enceinte chauffée – transformation de Laplace schéma-blocs

*On suppose que toutes les conditions initiales sont nulles.*

*On note : $A(p)$ la transformée de Laplace de $\alpha(t)$ et $Q(p)$, $\Theta(p)$ et $\Theta_1(p)$ respectivement les transformées de $q(t)$, $\theta(t)$ et $\theta_1(t)$.*

*On commence par écrire la transformée de Laplace de chaque équation.*

$$q(t) = k_0 \cdot \alpha(t) \overset{\mathcal{L}}{\rightarrow} Q(p) = k_0 \cdot A(p)$$

$$\theta_1(t) + \tau_1 \cdot \frac{d\theta_1(t)}{dt} = k_1 \cdot q(t). \overset{\mathcal{L}}{\rightarrow} \Theta_1(p) + \tau_1 \cdot p \cdot \Theta_1(p) = k_1 \cdot Q(p)$$

$$\theta(t) + \tau_2 \cdot \frac{d\theta(t)}{dt} = k_2 \cdot \theta_1(t). \overset{\mathcal{L}}{\rightarrow} \Theta(p) + \tau_2 \cdot p \cdot \Theta(p) = k_2 \cdot \Theta_1(p)$$

Les équations différentielles sont devenues des équations linéaires.

## Exemple : Enceinte chauffée – transformation de Laplace

*Il est facile maintenant de déterminer la relation donnant* $\Theta(p)$ *en fonction de* $\mathrm{A}(p)$ *et d'en déduire la fonction de transfert* $G(p) = \frac{\Theta(p)}{A(p)}$.

*Pour cela, on commence par isoler* $\Theta(p)$*:*

$$\Theta(p) = \frac{k_0 \cdot k_1 \cdot k_2}{(1 + \tau_1 \cdot p) \cdot (1 + \tau_2 \cdot p)} \cdot A(p)$$

Puis :

$$G(p) = \frac{\Theta(p)}{A(p)} = \frac{k_0 \cdot k_1 \cdot k_2}{(1 + \tau_1 \cdot p) \cdot (1 + \tau_2 \cdot p)}$$

L'entrée est un échelon de constante : $\alpha(t) = \alpha_0 \cdot \mathcal{H}(t)$. La transformée dans le domaine de Laplace donne : $A(p) = \frac{\alpha_0}{P}$

## Exemple : Enceinte chauffée – transformation de Laplace

L'entrée est un échelon de constante : $\alpha(t) = \alpha_0 \cdot \mathcal{H}(t)$. La transformée dans le domaine de Laplace donne : $A(p) = \frac{\alpha_0}{P}$

$$\Theta(p) = \frac{k_0 \cdot k_1 \cdot k_2}{(1 + \tau_1 \cdot p) \cdot (1 + \tau_2 \cdot p)} \cdot \frac{\alpha_0}{p}$$

Pour déterminer la transformée inverse, il est nécessaire de réaliser la décomposition en fractions simples.

$$\Theta(p) = \frac{A}{(1 + \tau_1 \cdot p)} + \frac{B}{(1 + \tau_2 \cdot p)} + \frac{C}{p}$$

Les trois coefficients sont déterminés par identification en égalant :

$$\frac{k_0 \cdot k_1 \cdot k_2}{(1 + \tau_1 \cdot p) \cdot (1 + \tau_2 \cdot p)} \cdot \frac{\alpha_0}{p} = \frac{A}{(1 + \tau_1 \cdot p)} + \frac{B}{(1 + \tau_2 \cdot p)} + \frac{C}{p}$$

## Exemple : Enceinte chauffée – transformation de Laplace

$$\frac{k_0 \cdot k_1 \cdot k_2}{(1+\tau_1 \cdot p)\cdot(1+\tau_2 \cdot p)} \cdot \frac{\alpha_0}{p} = \frac{A}{(1+\tau_1 \cdot p)} + \frac{B}{(1+\tau_2 \cdot p)} + \frac{C}{p}$$

Pour « A » :

$$(1+\tau_1 \cdot p) \cdot \frac{k_0 \cdot k_1 \cdot k_2}{(1+\tau_1 \cdot p)\cdot(1+\tau_2 \cdot p)} \cdot \frac{\alpha_0}{p} = A + (1+\tau_1 \cdot p) \cdot \frac{B}{(1+\tau_2 \cdot p)} + (1+\tau_1 \cdot p) \cdot \frac{C}{p}$$

on donne pour valeur « $p = -\frac{1}{\tau_1}$ » :

$$A = k_0 \cdot k_1 \cdot k_2 \cdot \alpha_0 \cdot \frac{\tau_1^2}{\tau_2 - \tau_1}$$

## Exemple : Enceinte chauffée – transformation de Laplace

$$\frac{k_0 \cdot k_1 \cdot k_2}{(1+\tau_1 \cdot p)\cdot(1+\tau_2 \cdot p)} \cdot \frac{\alpha_0}{p} = \frac{A}{(1+\tau_1 \cdot p)} + \frac{B}{(1+\tau_2 \cdot p)} + \frac{C}{p}$$

Pour « B » :

$$(1+\tau_2 \cdot p) \cdot \frac{k_0 \cdot k_1 \cdot k_2}{(1+\tau_1 \cdot p)\cdot(1+\tau_2 \cdot p)} \cdot \frac{\alpha_0}{p} = (1+\tau_2 \cdot p)\cdot A + B + (1+\tau_2 \cdot p)\cdot \frac{C}{p}$$

on donne pour valeur « $p = -\frac{1}{\tau_2}$ » :

$$B = k_0 \cdot k_1 \cdot k_2 \cdot -\alpha_0 \cdot \frac{\tau_2^2}{\tau_2 - \tau_1}$$

## Exemple : Enceinte chauffée – transformation de Laplace

$$\frac{k_0 \cdot k_1 \cdot k_2}{(1+\tau_1 \cdot p)\cdot(1+\tau_2 \cdot p)} \cdot \frac{\alpha_0}{p} = \frac{A}{(1+\tau_1 \cdot p)} + \frac{B}{(1+\tau_2 \cdot p)} + \frac{C}{p}$$

Pour « C » :

$$p \cdot \frac{k_0 \cdot k_1 \cdot k_2}{(1+\tau_1 \cdot p)\cdot(1+\tau_2 \cdot p)} \cdot \frac{\alpha_0}{p} = p \cdot \frac{A}{(1+\tau_1 \cdot p)} + p \cdot \frac{B}{(1+\tau_2 \cdot p)} + C$$

on donne pour valeur « $p = 0$ » :

$$C = k_0 \cdot k_1 \cdot k_2 \cdot \alpha_0$$

## Exemple : Enceinte chauffée – transformation de Laplace

$$\Theta(p) = \frac{k_0 \cdot k_1 \cdot k_2}{(1+\tau_1 \cdot p)\cdot(1+\tau_2 \cdot p)} \cdot \frac{\alpha_0}{p} = \frac{A}{(1+\tau_1 \cdot p)} + \frac{B}{(1+\tau_2 \cdot p)} + \frac{C}{p}$$

$$\boxed{A = k_0 \cdot k_1 \cdot k_2 \cdot \alpha_0 \cdot \frac{\tau_1^2}{\tau_2 - \tau_1}}$$

$$\boxed{B = k_0 \cdot k_1 \cdot k_2 \cdot -\alpha_0 \cdot \frac{\tau_2^2}{\tau_2 - \tau_1}}$$

$$\boxed{C = k_0 \cdot k_1 \cdot k_2 \cdot \alpha_0}$$

$$\Theta(p) = k_0 \cdot k_1 \cdot k_2 \cdot \alpha_0 \cdot \left(\frac{\tau_1^2}{(\tau_2 - \tau_1)\cdot(1+\tau_1 \cdot p)} - \frac{\tau_2^2}{(\tau_2 - \tau_1)\cdot(1+\tau_2 \cdot p)} + \frac{1}{p}\right)$$

## Exemple : Enceinte chauffée – transformation de Laplace

$$\Theta(p) = k_0 \cdot k_1 \cdot k_2 \cdot \alpha_0 \cdot \left(\frac{\tau_1^2}{(\tau_2 - \tau_1)\cdot(1+\tau_1 \cdot p)} - \frac{\tau_2^2}{(\tau_2 - \tau_1)\cdot(1+\tau_2 \cdot p)} + \frac{1}{p}\right)$$

*Donc :*

$$\frac{\tau_1^2}{(\tau_2 - \tau_1)} \cdot \frac{1}{1+\tau_1 \cdot p} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} \frac{\tau_1^2}{(\tau_2 - \tau_1)} \cdot \frac{1}{\tau_1} \cdot e^{-\frac{1}{\tau_1}.t} = \boldsymbol{\frac{\tau_1 \cdot e^{-\frac{1}{\tau_1}.t}}{(\tau_2 - \tau_1)}}$$

*Et :*

$$-\frac{\tau_2^2}{(\tau_2 - \tau_1)} \cdot \frac{1}{1+\tau_2 \cdot p} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} -\frac{\tau_2^2}{(\tau_2 - \tau_1)} \cdot \frac{1}{\tau_2} \cdot e^{-\frac{1}{\tau_2}.t} = \boldsymbol{-\frac{\tau_2 \cdot e^{-\frac{1}{\tau_2}.t}}{(\tau_2 - \tau_1)}}$$

*Et :*

$$\frac{1}{p} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} \mathbf{1}$$

*Ce qui donne dans le domaine temporel :*

$$\boldsymbol{\theta(t) = k_0 \cdot k_1 \cdot k_2 \cdot \alpha_0 \cdot \left(1 + \frac{\tau_1 \cdot e^{-\frac{1}{\tau_1}.t} - \tau_2 \cdot e^{-\frac{1}{\tau_2}.t}}{(\tau_2 - \tau_1)}\right) \cdot \mathcal{H}(t)}$$

## En conclusion :

*La transformée de Laplace permet donc de résoudre les équations différentielles à coefficients constants. Cette méthode ne permet pas de résoudre d'autres équations que celles que l'on pourrait résoudre par la méthode classique ; par contre elle permet de prendre en compte rapidement les conditions initiales et surtout les signaux d'entrées composés.*

# Fonction de transfert - Transmittance

*Un système dynamique linéaire est décrit par une équation différentielle à coefficients constants liant les grandeurs d'entrée et de sortie.*

$$b_m \frac{d^m y(t)}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} y(t)}{dt^{m-1}} + \ldots + b_1 \frac{dy(t)}{dt} + b_0 . y(t) = a_n \frac{d^n x(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} x(t)}{dt^{n-1}} + \ldots + a_1 \frac{dx(t)}{dt} + a_0 . x(t)$$

*On se place dans les conditions de Heaviside (toutes les conditions initiales sont nulles).*

*On pose :* $\mathcal{L}\big(x(t)\big) = X(p)$ *et* $\mathcal{L}\big(y(t)\big) = Y(p)$ *.*

*En appliquant la transformée de Laplace aux deux membres de l'égalité les conditions initiales étant nulles :*

$$(b_m \cdot p^m + b_{m-1} \cdot p^{m-1} + \cdots + b_1 \cdot p + b_0) \cdot Y(p) = (a_n \cdot p^n + a_{n-1} \cdot p^{n-1} + \cdots + a_1 \cdot p + a_0) \cdot X(p)$$

*Ce qui permet d'écrire :*

$$Y(p) = \frac{a_n \cdot p^n + a_{n-1} \cdot p^{n-1} + \cdots + a_1 \cdot p + a_0}{b_m \cdot p^m + b_{m-1} \cdot p^{m-1} + \cdots + b_1 \cdot p + b_0} \cdot X(p)$$

# Fonction de transfert - Transmittance

*On appelle H(p) la fonction de transfert (ou transmittance) du système :*

$$H(p) = \frac{Y(p)}{X(p)} = \frac{a_n \cdot p^n + a_{n-1} \cdot p^{n-1} + \cdots + a_1 \cdot p + a_0}{b_m \cdot p^m + b_{m-1} \cdot p^{m-1} + \cdots + b_1 \cdot p + b_0}$$

*Dans le cas des systèmes physiques, le degré du dénominateur est supérieur au degré du numérateur :* $m > n$.

*On appelle :*

- ***Zéros** : les racines du numérateur*
- ***Poles** : les racines du dénominateur*

# Forme canonique

*Il est toujours possible de mettre la fonction de transfert sous la forme suivante dite forme canonique avec :*

$$H(p) = \frac{N(p)}{D(p)} = K \cdot \frac{N(p)}{p^{\alpha} \cdot D_1(p)} = \frac{a_n \cdot p^n + a_{n-1} \cdot p^{n-1} + \cdots + a_1 \cdot p + 1}{p^{\alpha}(b_m \cdot p^m + b_{m-1} \cdot p^{m-1} + \cdots + b_1 \cdot p + 1)}$$

*Avec :*

- *N(p) : un polynôme en p avec N(0)=1;*
- *$D_1$ (p) : un polynôme en p avec $D_1$ (0)=1;*
- *K : le gain de la fonction de transfert;*
- *∝ : la classe de la fonction de transfert.*

# Forme canonique

*Pour les systèmes du premier et du second et du second ordre, on mettra les fonctions de transfert sous la forme :*

**Premier ordre :**

$$H_1(p) = \frac{K}{1 + \tau \cdot p}$$

*Avec « $K$ » le gain statique et « $\tau$ » la constante de temps.*

**Second ordre :**

$$H_2(p) = \frac{K}{1 + \frac{2 \cdot \xi}{\omega_n} \cdot p + \frac{p^2}{\omega_n^2}}$$

*Avec « $K$ » le gain statique, « $\xi$ » le coefficient d'amortissement et « $\omega_n$ » la pulsation propre.*

# Schéma-bloc

*A partir de la fonction de transfert, on établit le schéma bloc du système :*

$$X(p) \longrightarrow \boxed{H(p)} \longrightarrow Y(p)$$

**Soit :**

$$X(p) \longrightarrow \boxed{\dfrac{a_n \cdot p^n + a_{n-1} \cdot p^{n-1} + \cdots + a_1 \cdot p + a_0}{b_m \cdot p^m + b_{m-1} \cdot p^{m-1} + \cdots + b_1 \cdot p + b_0}} \longrightarrow Y(p)$$