Feuille TD n°2 :

Exercice n°1 : Caractérisation d'un asservissement d'un bras robot

On se propose dans cet exercice de résoudre complètement un asservissement de vitesse d'un moteur en courant continu, à partir des équations différentielles puis de comparer la résolution avec la transformée de Laplace.

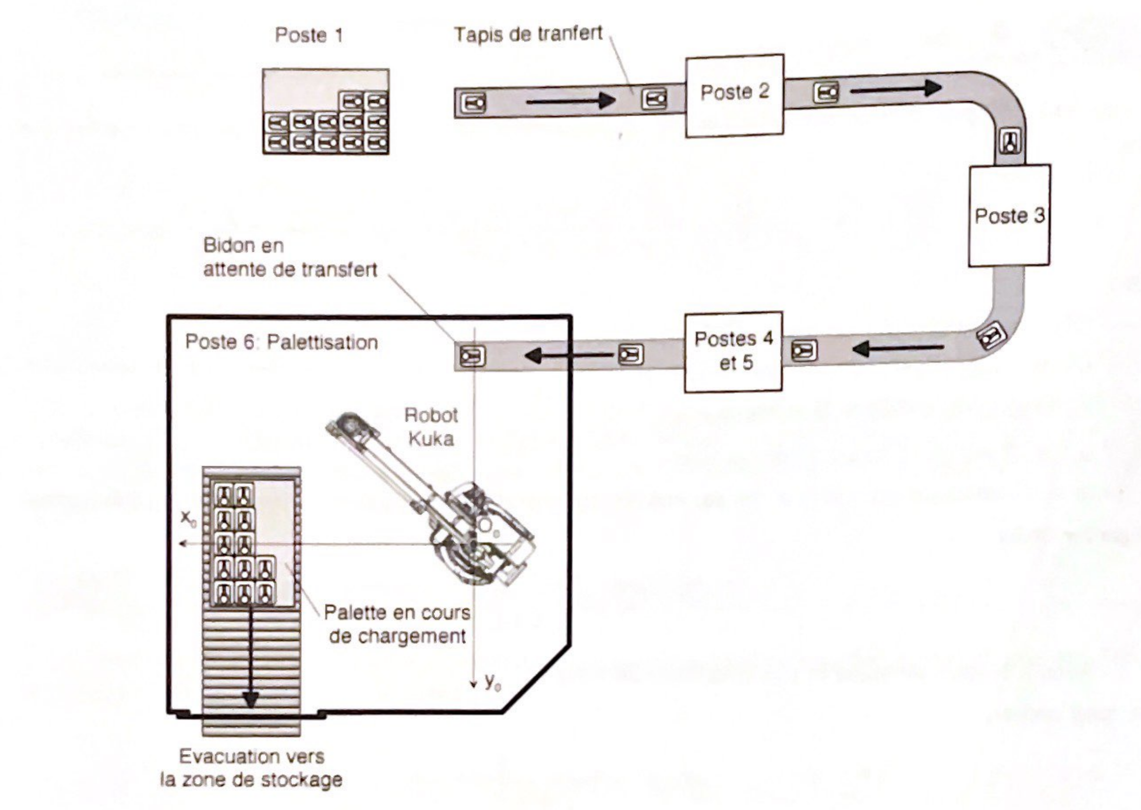

FIGURE 3.12 – Schéma d'implantation du poste de stockage

Le robot Kuka de la figure 3.12 doit prendre des bidons sur le tapis et les placer sur la palette.
Afin d'assurer de déplacer les bidons en toute sécurité, les mouvements doivent être asservis en vitesse et en position. Nous allons ici nous intéresser à l'asservissement de vitesse.
La structure de l'asservissement de vitesse est la suivante :

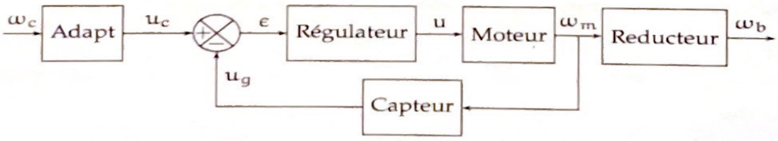

FIGURE 3.13 – Asservissement de vitesse d'un moteur à courant continu

Le comportement simplifié du moteur à courant continu peut être décrit par les équations suivantes :

$$u(t) = R \cdot i(t) + e(t)$$

$u(t)$: la tension d'alimentation, $i(t)$: le courant et $e(t)$ la force contre électromotrice.

$$J \cdot \frac{d\,\omega_m(t)}{dt} = C_m(t)$$

$\omega(t)$: la vitesse de rotation du moteur, $C_m(t)$: le couple moteur.

$$C_m(t) = K_t \cdot i(t)$$
$$e(t) = K_e \cdot \omega_m(t)$$

avec

— $K_e = 0,2V/(rad/s)$: constante de force électromotrice ;

— $K_t = 0,2Nm/A$: constante de couple ;

— $R = 2\,\Omega$: résistance de l'induit ;

— J : le moment d'inertie dépend de la masse transportée

  — lorsque le déplacement a lieu à vide (retour vers le tapis) : $J = J_{mini} = 5{,}25 \times 10^{-3}\ kgm^2$

  — lors du déplacement du bidon $J = J_{maxi} = 9 \times 10^{-3}\ kgm^2$.

A. Résolution de l'équation différentielle

Q1. Donner l'équation différentielle reliant la vitesse de rotation $\omega_m(t)$ en fonction de la tension d'alimentation $u(t)$.

Q2. Mettre cette équation différentielle sous la forme : $\tau \cdot \frac{d\,\omega_m(t)}{dt} + \omega_m(t) = K \cdot u(t)$. Déterminer τ et K pour les deux valeurs de J.

Une génératrice tachymétrique est utilisée pour mesurer la vitesse de rotation du moteur. La tension de sortie de la génératrice $u_g(t)$ varie de 0 à 12 V lorsque la vitesse varie de 0 à 3 500 tr/min.

Q3. En déduire le gain G_g de la génératrice (à préciser dans les unités SI) tel que :

$$u_g(t) = G_g \cdot \omega_m(t)$$

On note, K_a le gain de l'adaptateur tel que

$$u_c(t) = K_a \cdot \omega_c(t).$$

Q4. Justifier, si on souhaite faire un asservissement de vitesse du moteur, que $K_a = G_g$.

Le comparateur permet d'évaluer l'erreur :

$$\varepsilon(t) = u_c(t) - u_g(t)$$

et le régulateur génère à partir de cette erreur la tension de commande du moteur.

$$u(t) = K_{pv} \cdot \varepsilon(t)$$

Q5. Déterminer l'équation différentielle reliant $\omega_m(t)$ et $\omega_c(t)$, mettre sous la forme : $T_v \cdot \frac{d\,\omega_m(t)}{dt} + \omega_m(t) = K_v \cdot \omega_c(t)$.

Q6. Préciser les valeurs numériques pour les deux valeurs de J et pour $K_{pv} = 10$ et $K_{pv} = 100$.

On considère que $\omega_c(t) = \Omega_0$ une constante avec $\Omega_0 = 100\,rad\,s^{-1}$ et que à l'instant $t = 0$, $\omega_m(0) = 0\,rad\,s^{-1}$.

Q7. Résoudre l'équation différentielle $T_v \cdot \frac{d\,\omega_m(t)}{dt} + \omega_m(t) = K_v \cdot \Omega_0$.

Q8. Tracer la réponse temporelle, en déduire l'erreur indicielle et le temps de réponse à 5% pour les différentes valeurs de K_{pv} et T_v.

B. Utilisation de la transformation de Laplace

On considère que toutes les conditions initiales sont nulles dont $\omega_c(0) = 0$.

Q9. Traduire dans le domaine de Laplace l'équation différentielle entre $\omega_m(t)$ et $u(t)$ obtenue à la question Q1. En déduire la fonction $M(p) = \dfrac{\Omega_m(p)}{U(p)}$.

Q10. Traduire les autres équations dans le domaine de Laplace.

Q11. Vérifier que l'on trouve entre $\Omega_c(p)$ et $\Omega_m(p)$ la relation suivante $\Omega_m(p) = \dfrac{K_v}{1 + T_v \cdot p}\Omega_c(p)$.

On pose $\omega_c(t) = \Omega_0 \cdot \mathcal{H}(t)$ avec $\mathcal{H}(t)$ la fonction de Heaviside.

Q12. Déterminer la transformée inverse de $\Omega_m(p)$.

<u>Exercice n°2 :</u> Asservissement de vitesse du fil d'une machine à électroérosion *(adaptation du concours CCP TSI 2018)*.

A. Présentation

La description complète de la machine étudiée est disponible dans le sujet original : http://ccp.scei-concours.fr/cpge/sujet/2018/TSI/TSI-SI.pdf vous y trouverez la description de l'électro-érosion.

Dans cet exercice nous limitons l'étude à l'asservissement de vitesse du fil.

L'opération de taillage des électrodes nécessite une régulation de la vitesse mais également de la tension du fil. Cette régulation est effectuée à l'aide de deux moteurs de régulation (moteurs de régulation d'avance et d'avance-fil). Ces deux moteurs sont régulés en courant et on note respectivement $i_1(t)$ le courant d'alimentation du moteur de régulation d'avance et $i_2(t)$ le courant d'alimentation du moteur d'avance-fil. On donne dans la figure 3.14, la représentation du système et le paramétrage du modèle utilisé pour son asservissement.

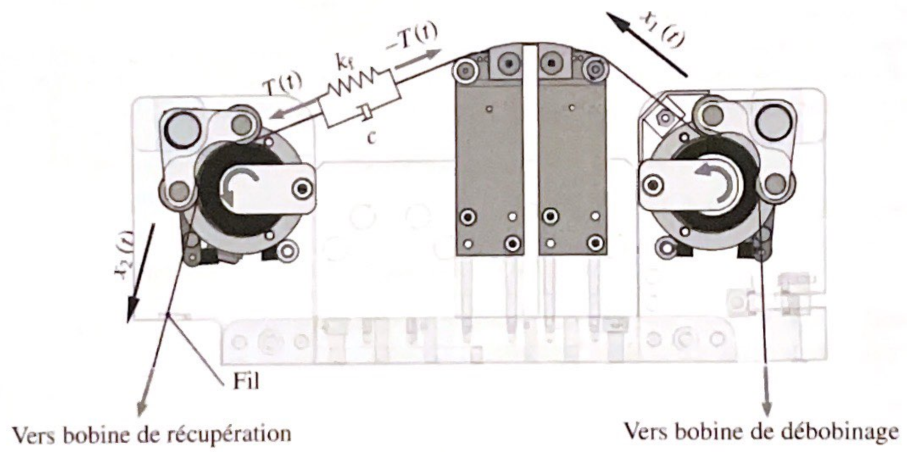

FIGURE 3.14 – Mise en situation du système de régulation de vitesse

On note la position courante du fil $x_1(t)$ situé en sortie de rouleau de régulation d'avance pour une position angulaire du rouleau de régulation notée $\theta_1(t)$. De la même manière, la position courante d'un point du fil en sortie de rouleau d'avance est notée $x_2(t)$ pour une position angulaire du rouleau d'avance $\theta_2(t)$. Ainsi, la position moyenne d'un point du fil situé entre les rouleaux, notée $x(t)$, est définie par :

$$x(t) = \frac{x_1(t) + x_2(t)}{2} \qquad (1)$$

On considère que le fil est modélisé par un ressort de raideur équivalente k_f et un amortisseur de constante visqueuse c. La tension $T(t)$ est alors donnée par :

$$T(t) = k_f \cdot (x_2(t) - x_1(t)) + c \cdot \left(\frac{d\,x_1(t)}{dt} - \frac{d\,x_2(t)}{dt}\right) \quad (2)$$

Les deux moteurs sont de caractéristiques identiques (moment d'inertie équivalent ramené sur l'arbre moteur/rouleau I_m, constante de couple K_m). Les rouleaux sont également identiques, de rayon R_c. On considère un frottement de type visqueux entre les rouleaux, le fil et les galets presseurs de coefficient de frottement visqueux f.

Le système compte ainsi :

— deux entrées : les courants moteurs de régulation d'avance $i_1(t)$ et d'avance $i_2(t)$;

— deux sorties : la vitesse $v(t) = \frac{d\,x(t)}{dt}$ et la tension $T(t)$ dans le fil.

Les équations différentielles régissant le comportement des moteurs sont données par :

$$\begin{cases} I_m \cdot \dfrac{d^2\,\theta_1(t)}{dt^2} = -f \cdot \dfrac{d\,\theta_1(t)}{dt} + R_c \cdot T(t) + K_m \cdot i_1(t) & \text{Moteur de régulation d'avance} \quad (3) \\ I_m \cdot \dfrac{d^2\,\theta_2(t)}{dt^2} = -f \cdot \dfrac{d\,\theta_2(t)}{dt} - R_c \cdot T(t) + K_m \cdot i_2(t) & \text{Moteur d'avance de fil} \quad (4) \end{cases}$$

On pose $\Theta_1(p)$, $\Theta_2(p)$, $X_1(p)$, $X_2(p)$, $X(p)$, $V(p)$, $I_1(p)$, $I_2(p)$, $T(p)$ les transformées de Laplace de $\Theta_1(t)$, $\theta_2(t)$, $x_1(t)$, $x_2(t)$, $x(t)$, $v(t)$, $i_1(t)$, $i_2(t)$, $T(t)$.

Q1. Convertir dans le domaine de Laplace les quatre équations ci-dessus puis les simplifier.

Q2. Donner la relation entre $X_i(p)$ et $\Theta_i(p)$, modifier les deux dernières équations.

À partir de ces équations, on cherche à obtenir les fonctions de transfert qui vont permettre de piloter les deux sorties $V(p)$ et $T(p)$ en fonction des deux entrées $I_1(p)$ et $I_2(p)$, pour cela, il est nécessaire de découpler les équations.

On pose deux variables intermédiaires $i_s(t) = i_1(t) + i_2(t)$ et $i_d(t) = i_2(t) - i_1(t)$. On nomme $I_s(p)$ et $I_d(p)$ les transformées de Laplace de ces deux variables.

Q3. Déterminer la fonction de transfert $H_1(p) = \frac{V(p)}{I_s(p)}$. La mettre sous forme canonique.

Q4. Déterminer la fonction de transfert $H_2(p) = \frac{T(p)}{I_d(p)}$.