DS 4

Calculatrices et tout objets connectés interdits. Merci d'encadrer les résultats.

Exercice n°1 (sur 3 points)

Linéariser $sin^4(\theta)$

Exercice n°2 (sur 3 points)

On considère f : $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = (x-3)^2+1+y^2$

1) L'application f est-elle injective ? surjective ?
2) Déterminer $f\ (\mathbb{R}^2)$
3) Déterminer $f^{-1}(\{5\})$

Exercice n°3 (sur 5 points)

On considère l'équation différentielle (E) : $2x(1-x)y'+(1-x)y = 1$

1) Pourquoi ne peut-on pas résoudre directement (E) sur $\mathbb{R}$?
2) Résoudre l'équation homogène associée sur I=]0,1[
3) a) Déterminer une primitive de $x \rightarrow \frac{1}{1-x^2}$ sur I (*ind.* $\frac{1}{1-x^2} = \frac{1}{(1-x)(1+x)}$)

   b) Pour $x \in$I, on pose $u(x) = \sqrt{x}$, exprimer simplement $\frac{u'(x)}{1-u(x)^2}$ et en déduire une primitive de : $x \rightarrow \frac{u'(x)}{1-u(x)^2}$

   c) Déterminer une solution particulière de (E) sur I

   d) Résoudre (E) sur I.

Problème (sur 9 points)

Pour tout entier $n \geq 2$, on considère l'équation $z^n + z + 1 = 0$ notée (E_n)

1) Déterminer les solutions de (E_2), montrer que chaque solution est de module strictement inférieur à 2

2) On s'intéresse ici au cas n=3
   a) Dresser le tableau de variations complet de f définie par $f(x) = x^3 + x + 1$ sur $\mathbb{R}$
   b) Montrer que (E_3) possède une unique solution réelle r, et que $r \in]-1; -\frac{1}{2}[$
   c) On note z_1 *et* z_2 les solutions complexes de (E_3), on ne cherche pas à les calculer mais on rappelle que : $\forall z \in \mathbb{C}, z^3 + z + 1 = (z-r)(z-z_1)(z-z_2)$
      Déterminer $z_1 + z_2$ et $z_1 z_2$ en fonction de r (*ind. développer* $(z-r)(z-z_1)(z-z_2)$ *et procéder par identification*)
   d) Déduire alors une majoration de $|z_1 + z_2|$ *et de* $|z_1 z_2|$
   e) En déduire que $|z_1| < 1 + \frac{2}{|z_1|}$
   f) En déduire que toutes les solutions de (E_3) sont de module strictement inférieur à 2.

3) On revient au cas général, soit a une solution de (E_n)
   a) Montrer que : $|a|^n \leq |a| + 1$
   b) En étudiant la fonction g : $\mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}, x \rightarrow x^n - x - 1$, montrer que $|a| < 2$