DS n°4

Exercice n°1

Les 3 questions sont indépendantes…

1) Soit θ un réel, linéariser, complètement, $\sin^3(\theta)\cos(\theta)$
2) Résoudre pour $z \in \mathbb{C}$, $e^{2z} = 4i$
3) Soit n un entier naturel non nul, on pose $S_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos(\frac{k\pi}{3})$
   Montrer que $S_n = 3^{n/2}\cos(\frac{n\pi}{6})$

Exercice n°2

On considère la fonction f définie par : $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, telle que f(x,y) = (3x-5y ;x-2y)

1) Montrer que f est injective
2) Montrer que f est surjective
3) Justifier l'existence de la réciproque de f, notée f^{-1}, et donner l'expression de cette réciproque.

Exercice n°3

Démontrer les égalités suivantes :

1. $\forall x \in [-1, 1]$, $\text{Arccos}(x) + \text{Arcsin}(x) = \dfrac{\pi}{2}$.
2. $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $\text{Arctan}(x) + \text{Arctan}\left(\dfrac{1}{x}\right) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} \text{ si } x > 0 \\ -\frac{\pi}{2} \text{ si } x < 0 \end{cases}$.

Déterminer l'ensemble de définition des fonctions suivantes puis simplifier leur expression.

1. $f : x \mapsto \cos(2\text{Arccos}(x))$
2. $g : x \mapsto \tan(\text{Arccos}(x))$
3. $h : x \mapsto \cos(\text{Arcsin}(x))$
4. $k : x \mapsto \sin(\text{Arctan}(x))$

Exercice n°4

1) En remarquant simplement que $\frac{t-i}{1+t^2} = \frac{t}{1+t^2} - i\frac{1}{1+t^2}$ déterminer une primitive de $t \to \frac{t-i}{1+t^2}$
2) On souhaite résoudre le système : $\begin{cases} (1+t^2)x' = tx + y \\ (1+t^2)y' = -x + ty \end{cases}$ où x et y désignent deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$
   a) Montrer que x' et y' sont continues sur $\mathbb{R}$ (*on dit que x et y sont* $C^1(\mathbb{R})$)
   b) On définit la fonction z par z=x+iy
   Déterminer une équation différentielle du premier ordre vérifiée par z.
   c) En déduire l'expression de z
   d) Résoudre le système initial en fournissant les expressions de x et de y.