Les probabilités

Une expérience aléatoire est un procédé donnant des résultats dépendant du hasard ou pouvant s'y assimiler. L'ensemble des résultats possibles est appelé l'univers et se note Ω.

Chaque élément de Ω est une éventualité ou une issue. Un événement est un ensemble d'éventualités.

Dans le secondaire, les probabilités ont été étudié lorsque Ω était un ensemble fini. Nous allons généraliser avec entre autres, Ω dénombrable.

I. Généralités

1) Tribu

a) Définition

On appelle **tribu sur Ω**, une partie τ de $P(\Omega)$ (parties de Ω) telle que :
- $\Omega \in \tau$
-si $A \in \tau$, alors ${}^cA = \Omega \backslash A \in \tau$
-pour toute suite $A_n \in \tau$, alors $\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n \in \tau$

b) Propriétés

Soit τ une tribu alors : $\emptyset \in \tau$, une intersection finie ou dénombrable d'éléments de τ est dans τ.

Démonstration : Il suffit de reprendre l'axiomatique des tribus.

Exemples:
Pour toute partie A de Ω: $\{ \Omega, A, {}^cA, \emptyset\}$ est une tribu
L'ensemble des parties de Ω, noté $P(\Omega)$ est une tribu sur Ω, appelée tribu discrète.

c) Définition

Un couple **(Ω, τ) avec τ une tribu sur Ω s'appelle espace probabilisable.**

2) Probabilité

Une probabilité sur (Ω, τ) est une application sur Ω, à valeurs positives, qui vérifie :
$P(\Omega) = 1$
Pour toute suite $A_n \in \tau$, d'événements deux à deux incompatibles, alors
$P(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n)$

Le triplet : **(Ω, τ, P) s'appelle espace probabilisé.**

Remarque :Une tribu est un modèle d'ensemble regroupant les événements.
Dans le cas où Ω est fini, on choisira toujours $\wp(\Omega)$ pour tribu.
Si Ω est dénombrable (typiquement $\Omega = \mathbb{N}$), on choisira là encore $\wp(\Omega)$ pour tribu.
Si Ω est infini non dénombrable (typiquement $\Omega = \mathbb{R}$), on ne prendra pas $\wp(\Omega)$, ce qui engendrerait une tribu trop grosse (En fait, il n'est pas alors possible de définir une application vérifiant les 3 axiomes des probabilités…), mais celle engendrée par les intervalles de $\mathbb{R}$.

3) Propriétés des probabilités

Soit P une probabilité sur (Ω, τ) alors :

$P(\emptyset)=0$

$P({}^{c}A) = 1-P(A)$

P est à valeurs dans [0,1]

Pour toute famille finie ou dénombrable d'événements deux à deux incompatibles $(A_i)_{i\in I}$, la famille $P((A_i))_{i\in I}$ vérifie : $P(\coprod_{i\in I} A_i)=\sum_{i\in I} P(A_i)$

Si $A\subset B$ alors $P(A)\leq P(B)$

$P(B\backslash A) = P(B)-P(A)$

$P(A\cup B) = P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

Démonstrations:

Soit la suite d'événements $A_n=\emptyset$, alors les événements sont deux à deux incompatibles, donc $P(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n)$, or si la série de terme constant $P(A_n)$ converge alors c'est que $P(A_n) = 0$ donc $P(\emptyset)=0$

On a : $P({}^{c}A\cup A)=P(\Omega)=1$ or ${}^{c}A$ et A incompatibles donc $P({}^{c}A\cup A)= P({}^{c}A) + P(A)=1$

Par définition P est à valeurs positives, de plus $P({}^{c}A) = 1-P(A)\geq 0$ donc $P(A)\leq 1$

Si $A\subset B$ alors B est la réunion des événements incompatibles A et $B\backslash A$ donc $P(B)=P(A)+P(B\backslash A)$

$P(A\cup B) = P(A)+P(B\backslash A)$ et $P(B)=P(A\cap B) + P(B\backslash A)$ d'où $P(B\backslash A)= P(B)-P(A\cap B)$

4) Théorème de continuité croissante

Si (A_n) est une suite croissante d'événements (au sens de l'inclusion) alors $\lim\limits_{n\to+\infty} P(A_n) = P(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n)$

De même, si (A_n) est une suite décroissante d'événements (au sens de l'inclusion) alors $\lim\limits_{n\to+\infty} P(A_n) = P(\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n)$

Démonstration :

On pose $A_{-1}=\emptyset$ et $B_n=A_n\backslash A_{n-1}$

On montre que $A_n=\bigcup_{k=0}^{n} B_k$ et $\bigcup_{k=0}^{\infty} A_k = \bigcup_{k=0}^{\infty} B_k$

De plus, les événements B_n sont incompatibles, donc

$P(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n)=P(\bigcup_{k=0}^{\infty} B_k)=\sum_{k=0}^{\infty} P(B_k)=\lim\limits_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} P(B_k)$ or $\sum_{k=0}^{n} P(B_k)= P(A_n)$

Exemple : On lance un dé classique une infinité de fois et on souhaite déterminer :

-La probabilité de l'événement A : « n'obtenir que des 6 »

-La probabilité de l'événement B : « obtenir au moins un 6 »

Soit F_i: "$On\ obtient\ un\ 6\ au\ i\grave{e}me\ lancer$"

Alors $A = \bigcap_{i=1}^{\infty} F_i$ et $P(A) =P(\bigcap_{i=1}^{\infty} F_i)= \lim\limits_{n\to\infty} P(\bigcap_{i=1}^{n} F_i) = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{6}\right)^n = 0$

On utilise l'indépendance des lancers !

Et B = $\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i$, P(B) = P($\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i$)= $\lim_{n\to\infty} P(\bigcup_{i=1}^{n} F_i)$ or ici les événements ne sont pas indépendants et la suite F_i n'est pas croissante.
On passe par le complémentaire…P($\bigcup_{i=1}^{n} F_i$) = 1 – P($\bigcap_{i=1}^{n} F_i$)→1

5) Indépendance
Deux événements A et B sont indépendants si P(A∩B) = P(A)P(B)

Remarque : Si A et B sont indépendants, il en va de même de ^{c}A avec B, etc.

Soit $(A_n)_{n\in I}$ une suite d'événements, on dit qu'ils sont mutuellement indépendants si pour tout partie finie J de I, on a : P($\bigcap_{i\in J} A_i$) = $\prod_{\in J} P(A_i)$

Etude d'un exemple :
Une urne contient 12 boules numérotées de 1 à 12. On en tire une, au hasard.
On définit les événements : A : « tirage d'un nombre paire »
Et B : « tirage d'un multiple de 3 »
Les événements A et B sont-ils indépendants ?
Même question avec 13 boules.

6) Probabilité conditionnelle.
Soient A et B deux événements avec P(B)>0, le réel P(A|B) = $\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$ s'appelle la **probabilité de A sachant que B a été réalisé.**

Inversion des conditionnements :
Soient A et B deux événements tels que P(A)>0 et P(B)>0 alors, **P(A|B) =** $\boldsymbol{\frac{P(A)\mathrm{P}(\mathrm{B}|\mathrm{A})}{P(B)}}$

7) Formule des probabilités composées
Soit $(A_n)_{n\in I}$ une famille d'événements tels que P($A_1\cap_{\dots}\cap A_n$)≠0
Alors : P($A_1\cap_{\dots}\cap A_n$) = P(A_1)P(A_2|A_1)× … ×P(A_n)P(A_n | $A_1\cap_{\dots}\cap A_{n-1}$)

Une suite $(A_n)_{n\in I}$ d'événements s'appelle un système complet d'événements lorsque si n≠p, $A_n\cap A_p = \emptyset$, $\forall n \in I$, $A_n \neq \emptyset$ et si la réunion des A_n est égale à Ω.

Démonstration : Par récurrence sur n.

8) Formule des probabilités totales :
Soit $(A_n)_{n\in I}$ un système complet d'événements alors pour tout événement B, on a : P(B) = $\sum_{n=0}^{+\infty} P(B\cap A_n)$

Démonstration :
B= ($A_1\cap B$) $\cup_{\dots}\cup$ ($A_n\cap B$) or les événements étant incompatibles…

Etude d'un exercice « classique »
Un fumeur décide d'arrêter de fumer. D'après des statistiques, on estime que si cette personne n'a pas fumé le n -ème jour, alors la probabilité pour qu'elle ne fume pas le jour suivant est de 0,3. Mais si elle a fumé le n -ème jour , alors la probabilité pour qu'elle ne fume pas le jour suivant est de 0,9.

Pour n entier, on note F_n l'événement « la personne fume le n -ème jour », et p_n la probabilité de F_n. On pose $p_0=1$
Démontrer que $p_{n+1} = -0,6p_n+0,7$
La personne va-t-elle arrêter de fumer ?

9) Formule de Bayes
Soit I un ensemble fini d'indices ou dénombrable, $(A_n)_{n\in I}$ un système complet d'événements avec pour tout n, $P(A_n)>0$
Alors : $P(A_k|B) = \frac{P(A_k)P(B|A_k)}{\sum_{i\in I} P(A_i)P(B|A_i)}$

Démonstration :
Il suffit de vérifier que $P(A_k|B)\sum_{i\in I} P(A_i)P(B|A_i) = P(A_k)P(B|A_k)$

II. Variables aléatoires

On travaille à présent sur l'espace probabilisé : (Ω, τ, P)

1) Variable aléatoire discrète et loi de probabilité associée.

a) Définition
Soit E un ensemble, une variable aléatoire discrète X sur (Ω, τ) est une application définie sur (Ω) à valeurs dans E, dont l'image $X(\Omega)$ est finie ou dénombrable et telle que l'image réciproque de tout élément de $X(\Omega)$ soit dans τ.

Exemple : On jette deux dés, on pose $\Omega=[\![1,6]\!]^2$
On peut définir la variable aléatoire X telle que X(a,b)=a+b

Remarques :
Le terme « variable aléatoire est trompeur car X est une fonction pas une variable ! »
X n'a rien d'aléatoire car la notion de probabilité n'entre même pas dans sa définition !
Pour tout x de E, $\{X\leq x\} = \{w\in \Omega$ tels que $X(w) \leq x\}\in \tau$

b) Définition
Soit X une variable aléatoire discrète sur (Ω, τ, P) telle que $X(\Omega) =\{x_n, n \in I\}$ où $I\subset \mathbb{N}$, alors la loi de probabilité de X est la suite $(p_n), n \in I$, définie par $p_n = P(X=x_n)$.

c) Théorème
Si une variable aléatoire discrète sur (Ω, τ), X prend ses valeurs dans $\{x_n, n \in I\}$, avec les x_n distincts et si $(p_n), n \in I$ et si une suite de réels positifs vérifiant $\sum_{n\in I} p_n = 1$, alors il existe une probabilité P sur (Ω, τ), telle que $P(X=x_n)=p_n$.

Démonstration :
Considérer : $P : \mathcal{P}(\Omega) \to [0,1]$, $A \to \sum_{w\in A} p_w$ et vérifier que P est bien une probabilité…

Exemple :
Soit $\lambda > 0$, pour tout entier naturel n, on définit $p_n = e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}$

On a $p_n \geq 0$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} p_n = 1$
Donc p_n correspond bien à une distribution de probabilités sur $\mathbb{N}$.

d) Définition
La fonction de répartition F_X d'une variable aléatoire réelle X sur (Ω, τ), est la fonction définie par : $\forall x \in \mathbb{R}, F_X(x) = P(X \leq x)$

e) Théorème
La fonction de répartition est une fonction positive, croissante de limite 0 en $-\infty$ et 1 en $+\infty$.

Démonstration :
Comme $F_X(x) = P(X \leq x)$, et P à valeurs positives, F_X est à valeurs positives.
Soit $x \leq y$, $P(X \leq x) \leq P(X \leq y)$, car $X^{-1}(]-\infty, x]) \subset X^{-1}(]-\infty, y])$

2) Couples variables aléatoires discrètes indépendantes.

a) Définition
Si X et Y sont deux variables aléatoires discrètes sur (Ω, τ, P), alors (X,Y) est **un couple de variables aléatoires indépendantes** lorsque pour tout élément $(x_i ; y_j)$ de $X(\Omega) \times Y(\Omega)$, $P(X=x_i, Y=y_j) = P(X=x_i)P(Y=y_j)$

b) Théorème
Si X et Y sont indépendantes alors pour toute partie A de X(Ω) et toute partie B de Y(Ω), on a : $P(X \in \boldsymbol{A}, \boldsymbol{Y} \in \boldsymbol{B}) = P(X \in \boldsymbol{A})\boldsymbol{P}(\boldsymbol{Y} \in \boldsymbol{B})$

Démonstration : $A = \bigcup_{i \in I}\{x_i\}$ *et* $B = \bigcup_{j \in J}\{y_j\}$, $P(X \in A, Y \in B) = \sum_{x_i \in A \text{ et } y_j \in B} P(X = xi)P(Y = yj)$
$P(X \in A, Y \in B) = (\sum_{x_i \in A} P(X = xi))(\sum_{y_j \in B} P(Y = yj)) = P(X \in A)P(Y \in B)$

c) Théorème
Si X et Y sont indépendantes alors pour toutes fonctions f et g, f(X) et g(Y) sont indépendantes.

Démonstration :
$P(f(X)=x_i, g(Y)=y_j) = P(X \in f^{-1}(x_i), Y \in g^{-1}(y_j)) = P(X \in f^{-1}(x_i))P(Y \in g^{-1}(y_j))$

d) Définition
Soit $(X_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$ une famille finie de variables aléatoires discrètes sur (Ω, τ, P), ces variables aléatoires sont mutuellement indépendantes lorsque :
$\forall (x_1, \dots, x_n) \in \prod_{i \in [\![1,n]\!]} X_i(\Omega)$, $P((X_i)_{i \in [\![1,n]\!]} = x_i) = \prod_{i=1}^{n} P(X_i = x_i)$

e) Théorème
Si $(X_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$ une famille finie de variables aléatoires discrètes sur (Ω, τ, P) mutuellement indépendantes, alors, quel que soit $(A_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$, les événements $X_i \in (A_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$ sont mutuellement indépendants.

f) Définition
Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille finie de variables aléatoires discrètes sur (Ω, τ, P), ces variables sont :
-deux à deux indépendantes lorsque $\forall(i,j) \in \mathbb{N}^2$, ($i\neq j \Rightarrow X_i$ et X_j indépendantes).

-mutuellement indépendantes lorsque pour toute partie finie I de $\mathbb{N}$, $(X_i)_{i\in I}$ est une famille finie de variables aléatoires discrètes mutuellement indépendantes.

Exercice :
Soit (X,Y) un couple de variables aléatoires discrètes dont la loi conjointe est donnée dans le tableau suivant :

X\Y	1	2	3	4
1	0,08	0,04	0,16	0,12
2	0,04	0,02	0,08	0,06
3	0,08	0,04	0,16	0,12

Déterminer les lois marginales de X et de Y
Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?

On obtient : P(X=1)=0,4 P(X=2)=0,2 et P(X=3)=0,4
De même : P(Y=1)=0,2 P(Y=2)=0,1 P(Y=3)=0,4 et P(Y=4)=0,3
On vérifie que P(X=1,Y=1)=0,08 et P(X=1)P(Y=1)=0,4$\times$0,2=0,08, en vérifiant les 11 autres calculs, on peut affirmer que les variables sont indépendantes !

g) Théorème
Si $X_1, X_2, \dots, X_n$ sont des variables aléatoires mutuellement indépendantes alors pour tout $m\in [\![1, n-1]\!]$ et pour toutes fonctions f et g, les variables $f(X_1, X_2, \dots, X_m)$ et $g(X_{1+m}, X_{2+m}, \dots, X_n)$ sont indépendantes.

Démonstration : Elle se fait par récurrence.

3) Espérance d'une variable aléatoire discrète
a) Définition
La variable aléatoire réelle discrète X à valeurs dans un ensemble fini ou dénombrable $\{x_n, n \in I\}$ est dite d'espérance finie lorsque la famille $(x_n P(X = x_n)_{n\in I}$ est sommable, si tel est le cas, on appelle espérance de X le réel : $E(X) = \sum_{n\in I} x_n P(X = x_n)$

Remarque : On dit que la variable X est centrée si E(X)=0

Exemple :
-Justifier que $p_n = \frac{1}{n(n+1)}$ correspond à une distribution de probabilités sur $\mathbb{N}^*$
-Admet-elle une espérance finie ?

b) Théorème
Si X est à valeurs dans $\mathbb{N}$, alors $E(X) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(X \geq n)$

Démonstration : Utiliser le fait que $P(X = n)$*=* $P(X \geq n)$*-* $P(X \geq n + 1)$

c) Théorème du transfert (théorème admis)
Si X est une variable aléatoire et f une application à valeurs réelles définie sur $X(\Omega)$ de X, alors f(X) est d'espérance finie si et seulement si, la série $\sum_{n\geq 0} P(X = x_n)\mathrm{f}(x_n)$ converge absolument.

Dans ce cas : $\mathbf{E(f(X))} = \sum_{n\geq 0} \boldsymbol{P}(\boldsymbol{X} = \boldsymbol{x_n})\mathbf{f}(\boldsymbol{x_n})$

d) Théorème
Soit X et Y deux variables aléatoires réelles discrètes.
On a : $\forall \boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}, \boldsymbol{E}(\boldsymbol{\alpha X} + \boldsymbol{Y}) = \boldsymbol{\alpha E}(\boldsymbol{X}) + \boldsymbol{E}(\boldsymbol{Y})$. Si X≥0, alors E(X) ≥0

Démonstration :
On applique la formule de transfert à X et à f :x→ αx
On applique la formule de transfert à (X,Y) et à f :x→ $x + y$

$\mathrm{E}(X) = \sum_{n\in I} x_n P(X = x_n)$ donc si X≥0, alors E(X) ≥0

e) Théorème
Si X et Y sont deux variables aléatoires discrètes indépendantes, alors E(XY)=E(X)E(Y)

Démonstration : Comme X et Y sont indépendantes :
P(X=x,Y=y)=P(X=x)P(Y=y)
D'après le théorème de transfert XY est d'espérance finie si et seulement si xy P(X=x)P(Y=y) est sommable.
Or xP(X=x) et yP(Y=y) sont sommables et $\sum_{(x,y)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)} xy\, P(X = x)P(Y = y) = (\sum_{x\in X(\Omega)} xP(X = x))(\sum_{yY(\Omega)} yP(Y = y))$

4) Variance

a) Théorème de Koenig-Huyghens
Si la variable aléatoire X^2 est d'espérance finie, alors X est elle-même d'espérance finie.

Si X^2 est d'espérance finie, alors : $V(X) = E(X^2)-E(X)^2$

L'écart-type de X est noté $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$

Démonstration :
De façon générale, si X^2 et Y^2 sont d'espérance finie alors XY est également d'espérance finie.
En effet : $(|X|-|Y|)^2 \geq 0$ *d'où :* $|XY| \leq \frac{1}{2}(X^2 + Y^2)$
Ainsi pour Y=1, on a : $|X| \leq \frac{1}{2}(X^2 + 1)$

b) Théorème
On a : $\forall (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) \in \mathbb{R}^2, \boldsymbol{V}(\boldsymbol{aX} + \boldsymbol{b}) = \boldsymbol{a}^2\boldsymbol{V}(\boldsymbol{X})$

Démonstration:
On a : $\forall(a,b) \in \mathbb{R}^2, V(aX+b)=E((aX+b)^2)-(E(aX+b))^2=E(a^2X^2+2abX+b^2)-(aE(X)+b)^2 = a^2E(X^2)+2abE(X)+b^2-a^2E(X)^2-2abE(X)-b^2 = a^2V(X)$

Remarque : Une variable aléatoire admettant une variance est centrée réduite lorsque E(X) = 0 et V(X) = 1
Par exemple : **Si V(X)≠0,** $\frac{X-E(X)}{\sigma(X)}$ **est centrée réduite.**

5) **Inégalités de Markov**
Soit X une variable aléatoire réelle discrète, alors : $\forall t > 0, P(|X| \geq t) \leq \frac{E(|X|)}{t}$

De plus, si X^2 **est d'espérance finie** alors : :$\forall t > 0, P(|X| \geq t) \leq \frac{E(|X|^2)}{t^2}$

Démonstration :
Soit $w \in \Omega$
Si $w \in \{|X| \geq a\}$*, alors* $1_{\{|X|\geq a\}}(w)=1$ *or* $|X(w)| \geq a$ *donc* $\frac{|X(w)|}{a} \geq 1$ $(car\ a > 0)$ *et* $1_{\{|X|\geq a\}}(w)=1 \leq \frac{|X(w)|}{a}$
Sinon, $w \notin \{|X| \geq a\}$ *,alors* $1_{\{|X|\geq a\}}(w)=0 \leq \frac{|X(w)|}{a}$ *car* $\frac{|X(w)|}{a}$ *est positive.*
Ainsi : $1_{\{|X|\geq a\}} \leq \frac{|X(w)|}{a}$
Donc $E(1_{\{|X|\geq a\}}) \leq E(\frac{|X(w)|}{a})$ *or* $E(1_{\{|X|\geq a\}}) = P(|X| \geq a)$ *et* $E(\frac{|X(w)|}{a}) = \frac{E(|X(w)|)}{a}$

6) Inégalité de Bienaymé-Tchebychev
Soit X une variable aléatoire réelle discrète telle que X^2 **soit d'espérance finie, alors :** $\forall \varepsilon > 0, P(|X - E(X)| \geq \varepsilon) \leq \frac{V(X)}{\varepsilon^2}$

Démonstration :
La variable $(X-E(X))^2$ *est positive et possède une espérance égale à V(X).*
On applique l'inégalité de Markov : $\forall \varepsilon > 0, P((X-E(X))^2 \geq \varepsilon^2) \leq \frac{V(X)}{\varepsilon^2}$*…*

7) Variance d'une somme finie de variables aléatoires
Soit $(X_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ une famille finie de variables aléatoires réelles discrètes dont les carrés admettent une espérance finie, alors :
$\mathbf{V(\sum_{i=1}^{n} X_i) = \sum_{i=1}^{n} V(X_i) + \sum_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2, i\neq j}(E(X_iX_j) - E(X_i)E(X_j))}$

Corollaire : Si $(X_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ une famille finie de variables aléatoires réelles discrètes dont les carrés admettent une espérance finie et deux à deux indépendantes, alors : $V(\sum_{i=1}^{n} X_i) = \sum_{i=1}^{n} V(X_i)$

8) Définition
Remarque préliminaire : Si X et Y sont de variance finie, alors il en est de même pour X-E(X) et Y-E(Y). Ainsi (X-E(X))(Y-E(Y)) est d'espérance finie.

a) Covariance

Si X et Y sont deux variables discrètes réelles dont les carrés sont d'espérance finie, alors leur covariance, notée **cov(X,Y) = E((X-E(X))(Y-E(Y)))**

Remarques :
Cov(X,X)=V(X)

On peut réécrire : $\mathbf{V}(\sum_{i=1}^{n} X_i) = \sum_{i=1}^{n} V(X_i) + \sum_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2, i\neq j}(E(X_iX_j) - E(X_i)E(X_j))$ **avec la covariance.**
D'où : $\mathbf{V}(\sum_{i=1}^{n} X_i) = \sum_{i=1}^{n} V(X_i) + 2\sum_{1\leq i<j\leq n} cov(X_i, X_j)$

$\mathrm{Cov}(\lambda X + Y, Z) = \lambda\mathrm{cov}(X,Z)+\mathrm{cov}(Y,Z)$

Exercice : On lance deux fois une pièce de monnaie équilibrée, soit X la variable aléatoire prenant pour valeur le nombre de pile obtenus moins un, soit Y la variable aléatoire prenant pour valeur le nombre de pile au deuxième lancer moins le nombre de pile au premier lancer.
Déterminer la loi conjointe du couple (X,Y)
Calculer cov(X,Y)
Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?

w	X(w)	Y(w)
(P,P)	1	0
(P,F)	0	-1
(F,P)	0	1
(F,F)	-1	0

D'où la loi du couple :

X\Y	-1	0	1
-1	0	1/4	0
0	1/4	0	1/4
1	0	1/4	0

Cov(X,Y)=0×(-1) ×1/4+0×(-1) ×1/4+0×(1) ×1/4+0×(1) ×1/4=0
Or P(X=-1,Y=-1)=0 alors que P(X=-1)P(Y=-1)=1/16

b) Le coefficient de corrélation est : $\boldsymbol{\rho}\mathbf{(X,Y)} = \frac{cov(X,Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)}$

c) Théorème (Formule de Koenig-Huyghens)
Si X et Y sont de variance finie, alors
On a : cov(X,Y) = E(XY)-E(X)E(Y) et -1≤ ρ(X,Y) ≤1

Démonstration :
cov(X,Y) = E((X-E(X))(Y-E(Y)))=E(XY-E(X)Y-E(Y)X+E(X)E(Y)) = E(XY)-2E(X)E(Y)+E(X)E(Y)= E(XY)-E(X)E(Y).

d) Propriétés :
L'application : (X,Y)→cov(X,Y) est une forme bilinéaire, symétrique, positive sur l'espace vectoriel des variables aléatoires réelles discrètes de variance finie.

Si X et Y sont de variance finie et indépendantes alors cov(X,Y)=0

Vocabulaire : si un couple de variables aléatoires discrètes réelles et de variances finies (X,Y) possède une covariance nulle alors les variables **X et Y sont dites décorrélées.**

III. Lois discrètes usuelles

1) Loi binomiale

a) Définition :

Soit p∈]0,1[, la variable aléatoire X suit la loi binomiale de paramètres n et p lorsque : $\forall k \in \mathbb{N}$, P(X=k) $= \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$

Notation : X↪B(n,p)

b) Théorème

Si X↪B(n,p), alors E(X)=np et V(X)=np(1-p)

Exemple :

Un restaurateur accueille chaque soir 70 clients. Il sait qu'en moyenne deux clients sur cinq prennent une crème brûlée. Il pense que s'il prépare 30 crèmes brulées, dans plus de 70% des cas, la demande sera satisfaite.
A-t-il raison ?
Combien de crèmes brûlées doit-il fabriquer au minimum pour que la demande soit satisfaite dans au moins 90% des cas ?

2) Loi géométrique

a) Définition

Soit p∈]0,1[, la variable aléatoire X suit la loi géométrique de paramètre p lorsque : P(X=0)=0 et $\forall k \in \mathbb{N}^*$, P(X=k) = $p(1-p)^{k-1}$

Notation : X↪G(p)

b) Théorème

Si X↪G(p) alors :
Son espérance est E(X) $= \frac{1}{p}$, Sa variance est : V(X) $= \frac{1-p}{p^2}$

c) Théorème

Une variable aléatoire X suivant la loi géométrique est une loi sans mémoire, ainsi, $\forall (n,k) \in \mathbb{N}^2, P(X > n+k | X > n) = P(X > k)$

Remarque : La loi géométrique est la seule distribution discrète à être sans mémoire.

3) Loi de Poisson

a) Définition

Une variable aléatoire X suit la loi de Poisson de paramètre λ lorsque : $\forall n \in \mathbb{N}$, P(X=n) $= e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}$

Notation : X$\hookrightarrow P(\lambda)$

b) Théorème
Si X$\hookrightarrow P(\lambda)$ alors :

Son espérance est : λ *et* Sa variance est : λ

c) Théorème
Si X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes suivant chacune une loi de Poisson de paramètres respectifs λ et μ, alors X+Y suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda + \mu$

Démonstration : En exercice !

4) Résultats asymptotiques

a) Théorème :
Si pour tout entier naturel n, $X_n \hookrightarrow B(n,p_n)$ et si $\lim\limits_{n\to+\infty} np_n = \lambda$, alors pour tout entier k, on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} P(X_n = k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$

Démonstration :
Si $X_n \hookrightarrow B(n,p_n)$, alors $P(X_n = k) = \binom{n}{k}{p_n}^k(1-p_n)^{n-k}$
$P(X_n = k) = \binom{n}{k}{p_n}^k \exp((n-k)\ln(1-p_n))$
Or: $k!\binom{n}{k} \sim n^k$, $p_n \sim \frac{\lambda}{n}$ ainsi $(n-k)\ln(1-p_n) \sim -np_n \to -\lambda$
$P(X_n = k) \sim \frac{1}{k!}n^k(\frac{\lambda}{n})^k e^{-\lambda}$

b) Loi faible des grands nombres
Si X_n est une suite de variables aléatoires 2 à 2 indépendantes et de même loi admettant une variance finie, alors :
Si $S_n=\sum_{k=1}^{n} X_k$, m=E(X_1) et $\sigma = \sigma(X_1)$, on a pour tout $\varepsilon > 0$, $P(|\frac{1}{n}S_n - m| > \varepsilon) \leq \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}$

Et alors : $\lim\limits_{n\to+\infty} P(|\frac{1}{n}S_n - m| > \varepsilon) = 0$

Démonstration :
On a : $E(\frac{1}{n}S_n) = m$, de plus $V(\frac{1}{n}S_n) = \frac{V(X_1)}{n}$
Par l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev : $P(|\frac{1}{n}S_n - E(\frac{1}{n}S_n)| > \varepsilon) \leq \frac{V(\frac{1}{n}S_n)}{\varepsilon^2}$…

IV. Variables aléatoires à densité

1) Généralités

a) Définition

Soit X une variable aléatoire, on dit que X admet une densité f si sa fonction de répartition F_X peut s'écrire sous la forme :$\forall x \in \mathbb{R}, F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$ où f est une fonction à valeurs positives, ayant un ensemble finie de points de discontinuité et telle que : $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = 1$

b) Caractérisation d'une variable aléatoire à densité

Soit X une variable aléatoire.

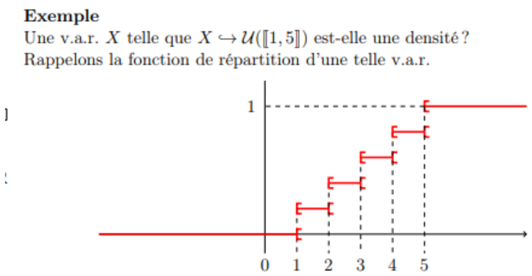
X est une variable aléatoire à densité si et seulement si sa fonction de répartition est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ privé éventuellement d'un ensemble fini de points.

c) Caractérisation des densités d'une variable aléatoire à densité

Soit f une fonction réelle, f est une densité si et seulement si :
-f est continue sur $\mathbb{R}$,
-f est C^1 sur $\mathbb{R}$,éventuellement privé d'un nombre fini de points.
-$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \geq 0$
-de plus : $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = 1$

Exemple :
Loi uniforme sur [0, 1].
Soit f : $\mathbb{R} \to [0, 1]$, telle que f(x) = 1 si $x \in [0, 1]$ et f(x) = 0 si $x \notin [0, 1]$. Alors f est une fonction de densité. C'est la densité de la loi dite uniforme sur [0, 1]. Une variable uniforme sur [0, 1] ne prend aucune valeur hors de l'intervalle [0, 1].

Exemple n°2 :
Loi exponentielle.
Soit f : $\mathbb{R} \to [0, 1]$, telle que $f(x) = e^{-x}$ si $x \geq 0$ et f(x) = 0 si x < 0. Alors f est une fonction de densité. C'est la densité de la loi exponentielle. Une variable de loi exponentielle ne prend que des valeurs positives.



d) Caractérisation de la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité.

Soit F une fonction réelle, F est une fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité si et seulement si :

-F est continue sur $\mathbb{R}$

-F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, éventuellement privé d'un nombre fini de points

-la fonction F est croissante sur $\mathbb{R}$

-De plus : $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0 \; et \; \lim_{x \to +\infty} F(x) = 1$

Démonstration : Partir simplement de : $\forall x \in \mathbb{R}, F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$

Exemple : Soit F définie par : $\begin{cases} 0 \; si \; x \in]-\infty, 0[\\ \frac{x}{5} \; si \; x \in [0,5] \\ 1 \; si \; x \in]5, +\infty[\end{cases}$

Vérifier que F définit une fonction de répartition sur $\mathbb{R}$

Préciser une densité correspondante

Par exemple f(x) = $\begin{cases} 0 \; si \; x \in]-\infty, 0[\\ \frac{1}{5} \; si \; x \in [0,5] \\ 0 \; si \; x \in]5, +\infty[\end{cases}$, mais on pourrait choisir n,'importe quels nombres positifs pour f(0) et f(5)

2) Espérance

Soit X une variable aléatoire de densité f

Si l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)dt$ converge, alors X admet une espérance et cette espérance **E(X) =** $\boldsymbol{\int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)dt}$

3) Moments

Soit k un entier naturel non nul, si l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} t^k f(t)dt$ converge, alors X admet un moment d'ordre k, et ce moment **m_k(X) =** $\boldsymbol{\int_{-\infty}^{+\infty} t^k f(t)dt}$

4) Variance, écart-type

Si X admet une espérance et si $l'intégrale \int_{-\infty}^{+\infty} (t - E(X))^2 f(t)dt$ converge, alors X admet une variance, et cette variance vaut : **V(X) =** $\boldsymbol{\int_{-\infty}^{+\infty} (t - E(X))^2 f(t)dt}$

Remarque : V(X) = E(X^2)-E(X)^2

On définit alors l'écart-type, par $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$

Démonstration : $\int_{-A}^{+A} (t - E(X))^2 f(t)dt = \int_{-A}^{+A} (t^2 - 2tE(X) + E(X)^2) f(t)dt$

Et : $\int_{-A}^{+A} (t - E(X))^2 f(t)dt = \int_{-A}^{+A} t^2 f(t)dt$ *-2E(X)* $\int_{-A}^{+A} tf(t)dt$ *+E(X)*$^2 \int_{-A}^{+A} f(t)dt$

Il suffit de passer à la limite…

5) Théorèmes

a) Théorème de transfert (admis)

Soit (Ω, τ, P) un espace probabilisé et X une variable aléatoire à densité sur cet espace de densité f.

Soit g une fonction de classe C^1 et strictement monotone sur X(Ω).

Soit Y=g(X)

Alors **Y admet une espérance et E(Y) =** $\boldsymbol{\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)f(t)dt}$

b) Propriétés
Soient X et Y deux variables à densité admettant une espérance et une variance. On a, $\forall(a,b) \in \mathbb{R}^2$
E(aX+b) = aE(X)+b et E(aX+bY) = aE(X)+bE(Y)
V(aX+b) = a^2V(X)

6) Lois usuelles
a) Loi uniforme
Notation : $X \hookrightarrow U([a,b])$
$X(\Omega)=[a,b]$
Densité : $\begin{cases} \forall x \in [a,b], f(x) = \frac{1}{b-a} \\ \forall x \notin [a,b], f(x) = 0 \end{cases}$

$E(X) = \frac{a+b}{2}$ *et* $V(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$

b) Loi exponentielle
Notation : $X \hookrightarrow E(\lambda)$ avec $\lambda > 0$
$X(\Omega)=\mathbb{R}^*$
Densité : $\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}^+, f(x) = \lambda e^{-\lambda x} \\ \forall x \in \mathbb{R}^{-*}, f(x) = 0 \end{cases}$

$E(X) = \frac{1}{\lambda}$ *et* $V(X) = \frac{1}{\lambda^2}$

c) Loi normale
Notation : $X \hookrightarrow N(m,\sigma)$ avec $\sigma > 0$
$X(\Omega)= \mathbb{R}$
Densité : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$, $E(X) = m$ *et* $V(X) = \sigma^2$

Infos complémentaires sur la loi normale :
a) X est une variable aléatoire qui suit la loi normale centrée réduite.
Pour tout $\alpha \in]0,1[$, il existe un unique réel positif u_α tel que $P(-u_\alpha \leq X \leq u_\alpha)=1-\alpha$.

Démonstration :
Par symétrie de la courbe de la fonction densité f, on a :

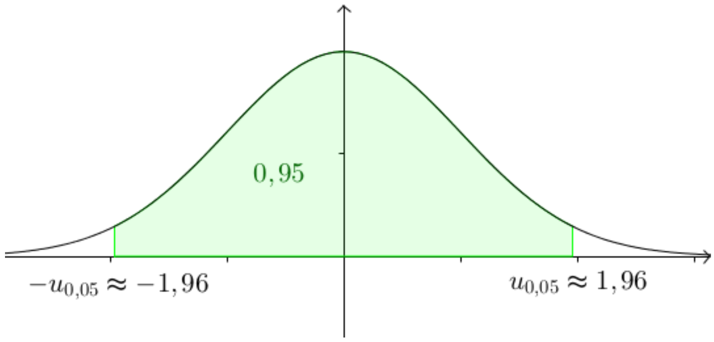
$$P(-t \leq X \leq t) = 2P(0 \leq X \leq t) = 2\int_0^t f(x)\,dx = 2F(t)$$

La fonction F est continue et strictement croissante sur [0,+∞[, il en est de même pour la fonction $2F$ *.*
L'aire totale sous la courbe est égale à 1, donc par symétrie, on a :

$$\lim_{t\to+\infty} \int_0^t f(x)dx = \frac{1}{2}.$$

Si $\alpha \in]0,1[$ *alors* $1-\alpha \in]0,1[$.
D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe au moins un réel u_α *de [0,+∞[, tel que 2F(t)= 1-* α.
L'unicité est obtenue par la croissance de F

Cas particulier : $u_{0.05} \approx 1.96$ et $u_{0.01} \approx 2.58$



Intervalles à "1, 2 ou 3 sigmas"
Soit X~ N(μ, σ^2)

$$P(\mu-\sigma \leq X \leq \mu+\sigma) \approx 0,683$$
$$P(\mu-2\sigma \leq X \leq \mu+2\sigma) \approx 0,954$$
$$P(\mu-3\sigma \leq X \leq \mu+3\sigma) \approx 0,997$$

Démonstration dans le cas 1 sigma :

$$P(\mu-\sigma \leq X \leq \mu+\sigma) = P(-\sigma \leq X-\mu \leq +\sigma) = P\left(-1 \leq \frac{X-\mu}{\sigma} \leq 1\right) = P(-1 \leq Y \leq 1)$$

avec Y variable aléatoire suivant une loi normale centrée réduite $N(0;1)$.

On ne connaît pas de formule explicite d'une primitive de la fonction densité de la loi $N(0;1)$.
A l'aide de la calculatrice, d'un logiciel ou d'une table de valeurs, on peut cependant obtenir une valeur approchée de la probabilité :

$$P(-1 \leq Y \leq 1) = \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \approx 0,683$$

Exercice :
Soit X↪N(20,2) à l'aide de la table ci-jointe, donner :

1) P(X>21)
2) P(X=17)
3) P(18≤X<20,5)
4) Déterminer x tel que P(20-x≤X≤20+x)=0,95

	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
+0.0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0.1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5754
0.2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0.3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0.4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0.5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0.6	0,7258	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7518	0,7549
0.7	0,7580	0,7612	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0.8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7996	0,8023	0,8051	0,8079	0,8106	0,8133
0.9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1.0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1.1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
$\boxed{1.2}$	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	$\boxed{0,9015}$
1.3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1.4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1.5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9430	0,9441
1.6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9485	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1.7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1.8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9700	0,9706
1.9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9762	0,9767
2.0	0,9773	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2.1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2.2	0,9861	0,9865	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2.3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2.4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2.5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2.6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2.7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2.8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9980	0,9980	0,9981

7) Remarque :

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes, de densités respectives f et g, alors Z=X+Y admet pour densité la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par h(x) = $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(x-t)dt$

Exemple :

Soit X↪ $U([0,1])$ et Y de densité g(t) = $\begin{cases} \forall t \in]0,1[, g(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}} \\ \forall x \notin]0,1[, g(t) = 0 \end{cases}$

On suppose que X et Y sont indépendantes.
Déterminer la loi de X+Y
Cette variable aléatoire admet-elle une espérance ?

Soit h la densité associée. On a h(x) = $\int_0^{+1} f(x-t) \times \frac{1}{2\sqrt{t}} dt$
Cherchons pour quelles valeurs de x, on a 0≤ $x - t \leq 1$
Pour : x -1≤ $t \leq x$
1er cas : x≤0, alors : t≤0 donc h(x)=0
2ème cas : 0≤ $x \leq 1$, h(x)= $\int_0^{+x} \frac{1}{2\sqrt{t}} dt = \sqrt{x}$
3ème cas : 1≤ $x \leq 2$, h(x)= $\int_0^{+1} \frac{1}{2\sqrt{t}} dt = 1$
4ème cas : 2< x, h(x)=0

Finalement : h(x)= $\begin{cases} 0 \text{ si } x \leq 0 \text{ ou si } x > 2 \\ \sqrt{x} \text{ si } 0 \leq x \leq 1 \\ 1 \text{ si } 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$

De plus : $\int_{-\infty}^{+\infty} t h(t) dt = \int_0^1 t\sqrt{t} dt + \int_1^2 t dt = \frac{19}{10}$

V. Convergence et approximations

1) Convergence en loi
   a) Définition :
   Soit (X_n) une suite de variables aléatoires réelles et soit X une variable aléatoire réelle. On note F_n la fonction de répartition de X_n et F celle de X.

On dit que la suite (X_n) converge en loi vers X si, en tout réel x où F est continue, on a :$F_n(x) \to F(x)$.

b) Exemple :
Pour tout entier naturel non nul, on définit X_n une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[\frac{-1}{n};\frac{1}{n}]$
Etudier la convergence de la suite (X_n)

D'abord, on détermine la fonction de répartition : $F_n(x)=\begin{cases} 0 \text{ } si \text{ } x \leq \frac{-1}{n} \\ \frac{nx+1}{2} \text{ } si \text{ } x \in [\frac{-1}{n};\frac{1}{n}] \\ 1 \text{ } si \text{ } x \geq \frac{1}{n} \end{cases}$

Pour x>0, $\lim\limits_{n \to +\infty} F_n(x) = 1$
Pour x<0, $\lim\limits_{n \to +\infty} F_n(x) = 0$
On reconnaît la fonction de répartition de la variable aléatoire certaine égale à 0.

2) Inégalité de Bienaymé-Tchebychev (déjà vu)
Soit X une variable aléatoire ayant une espérance m$\in \mathbb{R}$ et un écart-type $\sigma \in \mathbb{R}$
Alors : $\forall \varepsilon > 0, P(|X-m| > \varepsilon) \leq \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$

3) Loi faible des grands nombres (déjà vu)
Si X_n est une suite de variables aléatoires 2 à 2 indépendantes et de même loi admettant une variance finie, alors :
Si $S_n=\sum_{k=1}^{n} X_k$, m=E(X_1) et $\sigma = \sigma(X_1)$, on a pour tout $\varepsilon > 0$, $P(|\frac{1}{n}S_n - m| > \varepsilon) \leq \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}$

Et alors : $\lim\limits_{n \to +\infty} P(|\frac{1}{n}S_n - m| > \varepsilon)=0$

4) Approximation de la loi binomiale par la loi normale
Soit n un entier non nul et p$\in]0;1[$
Si $n \geq 30, et \text{ } np > 5 \text{ } et \text{ } n(1-p) > 5$
La loi B(n,p) peut être approchée par la loi normale : N(np,$\sqrt{np(1-p)}$)

Ainsi, si $X \hookrightarrow B(n,p)$, en notant ϕ la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite N(0,1), $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2, a \leq b, P(a \leq X \leq b) = \phi(\frac{b-np}{\sqrt{np(1-p)}})$-$\phi(\frac{a-np}{\sqrt{np(1-p)}})$

Problème de correction de continuité :
Lorsqu'on fait des probabilités, on est souvent conduit à remplacer des lois de probabilité discrètes par une loi continue. Ce problème s'appelle faire une correction de continuité.
En effet, si on approche une variable X suivant une loi binomiale par une variable Y suivant une loi normale.
Plus précisément, si $X \hookrightarrow B(n,p)$ et $Y \hookrightarrow N(np,\sqrt{np(1-p)})$

Si on approche P(X=24) par P(Y=24), on aura un problème puisque P(Y=24)=0
Par exemple, on approche P(X=24) par P(23,5≤ Y ≤24,5)

5) Approximation de la loi de Poisson par la loi normale
Soit $\lambda \in \mathbb{R}^{*+}$
Si $\lambda \geq 15$, alors la loi P(λ) peut être approchée par la loi N($\lambda, \sqrt{\lambda}$)
Ainsi : *En appelant* ϕ la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite N(0,1), $\forall(a,b) \in \mathbb{R}^2, a \leq b, P(a \leq X \leq b) = \phi(\frac{b-\lambda}{\sqrt{\lambda}})$- $\phi(\frac{a-\lambda}{\sqrt{\lambda}})$

6) Théorème central limite (admis)
Soit (X_n) une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes, de même loi, ayant une espérance m∈ $\mathbb{R}$ et un écart-type σ>0
On pose $S_n=\sum_{k=1}^{n} X_k$ et $S_n^* = \frac{S_n - nm}{\sigma\sqrt{n}}$
Alors la suite S_n^* converge en loi vers N(0 ;1) c'est-à-dire que$\forall(a,b) \in \mathbb{R}^2, a \leq b, P(a \leq S_n{}^* \leq b) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_a^b e^{-\frac{x^2}{2}} dx$

Remarque : Dans la pratique, on peut approcher S_n^* par N(0 ;1) lorsque n≥ 30

Exemple :
Un fournisseur d'accès à internet met en place un local d'accès qui dessert 5000 abonnés.
Chaque abonné a une probabilité de 20% d'être connecté. Les comportements des abonnés sont supposés indépendants les uns des autres.
-On note X la variable aléatoire égale au nombre d'abonnés connectés, quelle est la loi de X ? Son espérance et sa variance ?
-Soit Y $= \frac{X-1000}{\sqrt{800}}$, justifier qu'on peut approcher Y par la loi N(0,1)
-Le fournisseur souhaite savoir combien de connexions simultanées le point d'accès doit gérer pour que sa probabilité d'être saturé à un instant donné soit inférieure à 2,5%, c'est-à-dire déterminer un entier N tel que P(X≥N)≤ 0,025.
En utilisant l'approximation précédente, proposer une valeur approchée de ce nombre de connexions.

7) Etude d'un exemple :
On lance un dé « parfaitement équilibré » n fois, on note F_n la fréquence de sortie du 1.
Trouver un entier n_0 à partir duquel : P(|F_n - $\frac{1}{6}$|≤ 0,01) $>$ 0,95
-avec Bienaymé-Tchebychev
-avec la loi normale.

- P(|F_n - $\frac{1}{6}$|> 0,01) $< \frac{V}{0{,}01^2}$ or V=$\frac{p(1-p)}{n} = \frac{5.10^{-4}}{36n}$
P(|F_n - $\frac{1}{6}$|≤ 0,01) $= 1 -$ P(|F_n - $\frac{1}{6}$|> 0,01)>1-$\frac{5.10^{-4}}{36n}$
On cherche n tel que : 1-$\frac{5.10^{-4}}{36n}$>0,95
Soit : n_0=27778

-On suppose que n>30

nF_n suit $B(n,\frac{1}{6})$ et $T_n=\frac{nF_n-\frac{n}{6}}{\sqrt{\frac{5n}{36}}}=\frac{F_n-\frac{1}{6}}{\frac{1}{6}\sqrt{\frac{5}{n}}}$

$P(|F_n - \frac{1}{6}| \leq 0{,}01) = P(|T_n| \leq \frac{6.10^{-2}}{\sqrt{\frac{5}{n}}})$ et $P(|T_n| \leq \frac{6.10^{-2}}{\sqrt{\frac{5}{n}}}) > 0{,}95 = P(|T_n| \leq 1{,}96)$

D'où $\frac{6.10^{-2}}{\sqrt{\frac{5}{n}}} \geq 1{,}96$, d'où $n_0=5336$

Exercice n°2 :

Le but de l'exercice est de démontrer que : $e^{-n}\sum_{k=0}^{n}\frac{n^k}{k!} \to \frac{1}{2}$

Soit une suite de variables aléatoires indépendantes (X_n) suivant toutes une loi de Poisson P(1) :

Démontrer que : $S_n= X_1+\ldots+X_n$ suit une loi de Poisson(n)

A l'aide du théorème central limite, donner $\lim\limits_{n\to\infty} P(\frac{S_n-n}{\sqrt{n}} \leq 0)$

Démontrer que : $P(\frac{S_n-n}{\sqrt{n}} \leq 0) = e^{-n}\sum_{k=0}^{n}\frac{n^k}{k!}$

Conclure.

Par récurrence… $X_1+\ldots+X_n$ suit une loi de Poisson(n) car X_1+X_2 suit un P(2)

On a: $\lim\limits_{n\to\infty} P(\frac{S_n-n}{\sqrt{n}} \leq 0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{0} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx = \frac{1}{2}$

Indépendamment du calcul précédent, $P(\frac{S_n-n}{\sqrt{n}} \leq 0) = P(S_n \leq 0) = \sum_{k=0}^{n} P(X=k)$

Avec $X \hookrightarrow P(n)$, d'où $\sum_{k=0}^{n} P(X=k) = e^{-n}\sum_{k=0}^{n}\frac{n^k}{k!}$