TD Statique des fluides

Relation de l'hydrostatique

Exercice 1 : Baromètre de Torricelli

1 D'après la relation de l'hydrostatique,

$$P_B - \cancel{P_A} = \mu g h \qquad \text{soit} \qquad \boxed{h = \frac{P_{\text{atm}}}{\mu g} = 0{,}76\,\text{m}\,.}$$

2 Le volume de mercure dans le tube se conserve. Si la pression atmosphérique est plus élevée, le point B va descendre et le point A va monter d'autant. Inversement, si elle est plus faible alors le point B remonte et le point A descend d'autant. Finalement, il suffit de mesurer la hauteur h entre les deux surfaces du mercure pour en déduire la pression atmosphérique.

3 Cela n'a rien d'étonnant ! Le facteur de conversion est simplement la hauteur h lue en mm.

Exercice 2 : Deux liquides dans un tube en U

Il y a trois inconnues, les hauteurs z_e (surface libre côté eau), z_h (côté huile) et z_i (interface), donc trois relations à trouver.

(1) Le volume d'huile V est connu donc la hauteur d'huile h aussi. Ainsi, $h = z_\text{h} - z_\text{i} = V/S = 3\,\text{cm}$.
(2) La relation d'hydrostatique de chaque côté et la continuité de la pression à l'interface donnent en $z = z_\text{i}$: $P_\text{atm} + \rho_\text{h}\, g\,(z_\text{h} - z_\text{i}) = P_\text{atm} + \rho_\text{e}\, g\,(z_\text{e} - z_\text{i})$ d'où $z_\text{e} - z_\text{i} = \frac{\rho_\text{h}}{\rho_\text{e}}(z_\text{h} - z_\text{i})$.
(3) La conservation du volume d'eau indique que si le niveau descend de x d'un côté il monte d'autant de l'autre : $z_\text{i} = z_0 - x$ et $z_\text{e} = z_0 + x$. Attention, c'est bien z_i qui intervient.

On utilise ensuite l'équation d'hydrostatique en remplaçant systématiquement z_e, z_i et z_h par ce qui convient en termes de z_0, h et x. Cela conduit à

$$x = \frac{h}{2}\frac{\rho_\text{h}}{\rho_\text{e}} = 1{,}4\,\text{cm}$$

et donc à

$$\boxed{z_\text{e} = 11{,}4\,\text{cm} \qquad z_\text{i} = 8{,}6\,\text{cm} \qquad z_\text{h} = 11{,}6\,\text{cm}}$$

Exercice 3 : Ressort et tube en U

Introduisons un axe z vertical ascendant dont l'origine est située à la position initiale du bouchon, représentée en pointillés sur la figure de l'énoncé.

1 Dans la situation initiale, les forces de pression exercées sur et sous le bouchon se compensent. Le bouchon n'est donc soumis qu'à son poids et à la force de rappel du ressort, qui se compensent à l'équilibre,

$$m\vec{g} - k\,\Delta\ell_0\,(-\vec{u}_z) = \vec{0} \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{\Delta\ell_0 = \frac{mg}{k}\,.}$$

2 Les forces de pression ne se compensent plus : le bouchon subit sur la face supérieure une force $P_\text{atm}\,S(-\vec{u}_z)$ orientée vers le bas, et sur la face inférieure une force $PS\vec{u}_z$ orientée vers le haut. Par ailleurs, l'allongement du ressort est plus faible que précédemment et vaut désormais $\Delta\ell = \Delta\ell_0 - \Delta z$.

L'équation d'équilibre devient donc en projetant

$$\boxed{-mg + k\Delta\ell - P_\text{atm}S + PS = 0\,.}$$

3 La seule inconnue dans l'équation précédente est la pression P, que l'on va relier à ρ par la loi de l'hydrostatique. Pour ce faire, le plus simple est d'exprimer la pression P_0 en $z = 0$ (c'est-à-dire au niveau de la ligne pointillée) en raisonnant sur les deux branches,

$$P_0 = P_\text{atm} + \rho g h = P + \rho g\,\Delta z\,,$$

ce qui conduit à
$$P = P_{\text{atm}} + \rho g(h - \Delta z)\,.$$
De la question précédente on déduit alors
$$-mg + k(\Delta\ell_0 - \Delta z) - P_{\text{atm}} S + (P_{\text{atm}} + \rho g(h - \Delta z))\, S = 0$$
soit
$$-mg + k(\Delta\ell_0 - \Delta z) + \rho g(h - \Delta z) S = 0$$
et ainsi
$$\rho g(h - \Delta z) S = mg - k(\Delta\ell_0 - \Delta z)\,.$$
En remplaçant $\Delta\ell_0$ par son expression, il vient
$$\rho g(h - \Delta z) S = k\,\Delta z$$
et finalement
$$\boxed{\rho = \frac{k\,\Delta z}{g(h - \Delta z) S}\,.}$$

$\boxed{4}$ La section vaut $S = \pi d^2/4$. Numériquement,
$$\boxed{\rho = 1{,}0 \cdot 10^3\,\mathrm{kg \cdot m^{-3}}\,,}$$
c'est donc de l'eau qui a été ajoutée dans le tube.

Forces pressantes

Exercice 4 : Force de pression sur un tube à essais

1 - *D'après la relation de la statique des fluides,*
$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}z} = +\rho g \qquad \text{d'où} \qquad \int_{P_0}^{P(z)} dP = \rho g \int_{-H}^{z} dz \qquad \text{soit} \qquad \boxed{P(z) = P_0 + \rho g(z + H)\,.}$$

2 - *Pour chaque surface élémentaire de cette portion cylindrique du tube, la force de pression élémentaire est portée par le vecteur $\vec{e}_r$. Ainsi, les forces en deux points symétriques sont de sens opposés. Comme ces deux points sont à la même altitude, alors la pression y est la même, donc ces forces sont également de même norme. Elles se compensent donc.*

3 - *Tout plan contenant l'axe (Oz) est un plan de symétrie du système, donc la résultante des forces pressantes est incluse dans l'intersection de ces plans, c'est-à-dire selon l'axe (Oz). On en déduit*
$$\vec{F}_P = F_{P,z}\,\vec{e}_z\,.$$

4 - *Raisonnons en coordonnées* ***sphériques****, ce qui change la définition de l'angle θ. La force de pression est en tout point M encore une fois dirigée par $\vec{e}_r$ ... mais comme le système de coordonnées n'est plus le même, ce n'est plus le même vecteur.*

La surface élémentaire qui subit la force est de normale $\vec{e}_r$ et de rayon $r = R$, d'où on déduit le vecteur surface élémentaire
$$\overrightarrow{dS} = R^2\,\sin\theta\,d\theta d\varphi\,\vec{e}_r\,.$$

Cet élément de surface subit la force pressante exercée par l'eau, de pression $P(z)$, et la force pressante exercée par l'air, de pression uniforme P_0 et de sens opposé à la précédente. Ainsi,
$$\overrightarrow{dF_P} = P(z)\,\overrightarrow{dS} - P_0\,\overrightarrow{dS}$$
d'où on déduit
$$\begin{aligned} dF_z &= (P(z) - P_0)\,R^2\,\sin\theta\,d\theta\,d\varphi\,\vec{e}_r\cdot\vec{e}_z \\ &= \rho g(H+z)\,R^2\,\sin\theta\,d\theta\,d\varphi \times \cos\theta \\ &= \rho g(H + R\cos\theta)\,R^2\,\sin\theta\cos\theta\,d\theta\,d\varphi \end{aligned}$$

On peut alors sommer,

$$
\begin{aligned}
F_z &= \iint \mathrm{d}F_z \\
&= \iint \rho g(H + R\cos\theta)\cos\theta\, R^2\, \sin\theta\, d\theta d\varphi \\
&= R^2 \rho g \times \int_0^{\pi/2} (H + R\cos\theta)\cos\theta \sin\theta\, d\theta \times \int_0^{2\pi} d\varphi \\
&= 2\pi R^2 \rho g \int_0^{\pi/2} (H + R\cos\theta)\cos\theta \sin\theta\, d\theta \\
&= 2\pi R^2 H\rho g \int_0^{\pi/2} \cos\theta \sin\theta\, d\theta + 2\pi R^3 \rho g \int_0^{\pi/2} \cos^2\theta \sin\theta\, d\theta \\
&= 2\pi R^2 H\rho g \times \left(-\frac{-1}{4} + \frac{1}{4}\right) + 2\pi R^3 \rho g \left(-\frac{0^3}{3} + \frac{1^3}{3}\right) \\
&= \pi R^2 H\rho g + \frac{2\pi}{3} R^3 \rho g \\
F_z &= \pi R^2 \rho g \left(H + \frac{2}{3} R\right)
\end{aligned}
$$

ce qui conduit en fin de compte à

$$\boxed{\vec{F} = \pi R^2 \rho g \left(H + \frac{2}{3} R\right) \vec{e}_z\,.}$$

Exercice 5 : Tunnel de l'aquarium Nausicaa

1 L'eau étant un fluide incompressible, la relation de la statique des fluides s'intègre directement :

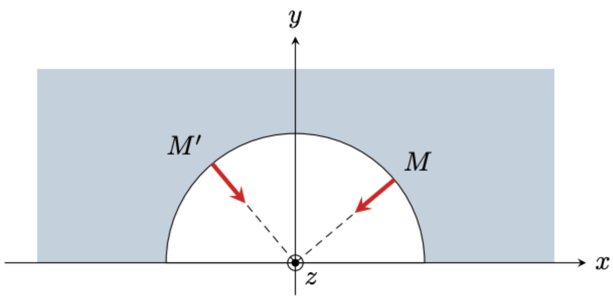
$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}y} = -\rho g \qquad \text{soit} \qquad \int_{P_0}^{P(y)} \mathrm{d}P = -\rho g \int_H^y \mathrm{d}y$$

ce qui donne

$$\boxed{P(y) = P_0 - \rho g(y - H)\,.}$$

2 Voir figure 1. Le plan $\Pi_s = (O, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ est un plan de symétrie du système, de même que le plan passant par le milieu du tunnel et de vecteurs directeurs $(\vec{e}_x, \vec{e}_y)$. Ainsi, la résultante des forces pressantes doit appartenir à ces deux plans simultanément, elle est donc nécessairement portée par $\pm\vec{e}_y$. La pression dans l'eau étant supérieure à celle dans l'air, on en déduit que la résultante des forces qu'il subit est portée par $-\vec{e}_y$.

> *Pour bien comprendre la symétrie, on peut tracer les deux forces subies par le tunnel en deux points M et M' symétriques par rapport au plan Π_s, voir figure 1. Leurs composantes se compensent selon $\vec{e}_x$ mais s'ajoutent selon $-\vec{e}_y$. Ce raisonnement pouvant être mené pour n'importe quel point de la surface du tunnel, le force résultante est donc portée par $-\vec{e}_y$.*



3 Exprimons $P(M)$ en fonction de l'angle θ : on constate géométriquement que

$$y = a\cos\theta \qquad \text{donc} \qquad P(M) = P_0 - \rho g(a\cos\theta - H)\,.$$

Considérons un élément de surface du tunnel, qui est donc de normale $\vec{e}_r$ et tel que $r = a$. Ainsi,

$$\overrightarrow{\mathrm{d}S} = a\,\mathrm{d}\theta \times \mathrm{d}z \times \vec{e}_r\,.$$

En prenant en compte la force exercée par l'air sur la vitre,

$$\overrightarrow{\mathrm{d}F_p} = \overrightarrow{\mathrm{d}F}_{p,\text{air}} + \overrightarrow{\mathrm{d}F}_{p,\text{eau}} = P_0 \,\overrightarrow{\mathrm{d}S} - (P_0 - \rho g(a\cos\theta - H))\,\overrightarrow{\mathrm{d}S}$$

soit

$$\overrightarrow{\mathrm{d}F_p} = \rho g(a\cos\theta - H)a\,d\theta\,\mathrm{d}z\,\vec{e}_r$$

En projetant sur $\vec{e}_y$, comme $\vec{e}_r\cdot\vec{e}_y = \cos\theta$, il vient

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}F_{p,y} &= \rho g(a\cos\theta - H)a\cos\theta\,d\theta\,\mathrm{d}z \\
&= \left(-\rho g H a\cos\theta + \rho g a^2\cos^2\theta\right)\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z \\
&= \left(-\rho g H a\cos\theta + \rho g a^2\frac{1+\cos(2\theta)}{2}\right)\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z
\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathrm{d}F_{p,y} = \left(\frac{1}{2}\rho g a^2 - \rho g H a\cos\theta + \frac{1}{2}\rho g a^2\cos(2\theta)\right)\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z\,.}$$

4 Il reste alors à procéder au calcul de l'intégrale. L'intégrale sur dz donne directement L, et il reste l'intégrale sur dθ, que l'on décompose

$$\begin{aligned}
F_{p,y} &= \frac{1}{2}\rho g a^2 L\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\mathrm{d}\theta - \rho g H a L\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos\theta\mathrm{d}\theta + \frac{1}{2}\rho g a^2 L\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos(2\theta)\mathrm{d}\theta \\
&= \frac{1}{2}\rho g a^2 L\times\pi - \rho g H a L\left[\sin\theta\right]_{-\pi/2}^{\pi/2} + \frac{1}{2}\rho g a^2 L\left[\frac{1}{2}\sin(2\theta)\right]_{-\pi/2}^{\pi/2} \\
&= \frac{\pi}{2}\rho g a^2 L - 2\rho g H a L + 0
\end{aligned}$$

$$\boxed{F_{p,y} = \rho g a L\left(\frac{\pi a}{2} - 2H\right)}$$

On vérifie que $F_{p,y} < 0$, conformément à ce que prévoyait l'analyse qualitative. Numériquement, on trouve

$$\boxed{F_p = 3\cdot 10^6\,\mathrm{N}}$$

soit une masse équivalente de 300 tonnes.

Exercice 6 : Entonnoir retourné

1 L'entonnoir est soumis à quatre forces : son poids, la force de réaction de la table (qui s'annule à la limite du soulèvement), la force de pression exercée par l'air et celle exercée par l'eau. L'entonnoir se soulève lorsque la force de pression exercée par l'eau devient suffisante pour compenser le poids et la force exercée par l'air. Or si on suppose la pression partout égale à P_0 dans l'eau, les deux forces pressantes de l'air et de l'eau sont égales et le poids ne peut jamais être compensé. Il faut donc traduire le fait que la pression est supérieure dans l'eau que dans l'air.

Le champ de pression est donné par la loi de l'hydrostatique. L'axe z étant vers le haut,

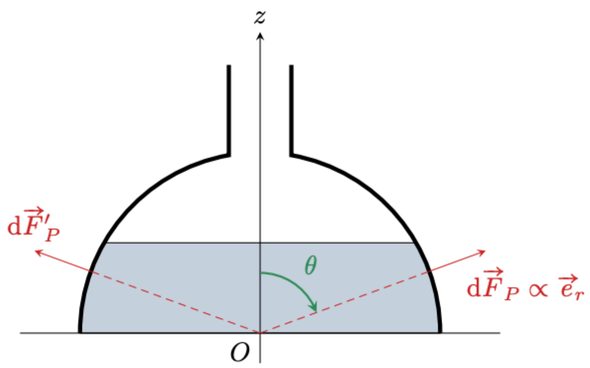
$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}z} = -\mu_0 g \qquad \text{soit} \qquad \int_{P_0}^{P(z)}\mathrm{d}P = -\mu_0 g\int_h^z \mathrm{d}z$$

si bien que

$$\boxed{P(z) = P_0 - \mu_0 g(z-h) = P_0 + \mu_0 g(h-z)\,.}$$

2 On raisonne en coordonnées sphériques de centre O au fond de l'entonnoir. Tout plan contenant l'axe (Oz) est plan de symétrie du système, la résultante des forces pressantes se trouve donc dans l'intersection de tout ces plans, c'est-à-dire qu'elle est portée par $\vec{e}_z$.

> *Pour bien le comprendre, on peut tracer les forces pressantes en deux points M et M' de l'entonnoir symétriques, voir figure 2. On constate les composantes z de la force de pression élémentaire en ces deux points s'ajoutent alors que les autres composantes se compensent. La force pressante exercée par l'eau sur l'entonnoir est donc dirigée selon $\vec{e}_z$.*



Autour du point M, l'élément mésoscopique qui subit la force pressante est de normale $\vec{e}_r$ et donc de surface $\mathrm{d}S = R\,\mathrm{d}\theta \times R\sin\theta\,\mathrm{d}\varphi$. En tenant compte de l'eau à la pression $P(z)$ et de l'air à la pression P_0, la composante utile de la force infinitésimale qu'il subit est donc

$$\begin{aligned}\mathrm{d}F_{P,z} &= \left(P(z)\overrightarrow{\mathrm{d}S} - P_0\overrightarrow{\mathrm{d}S}\right)\cdot\vec{e}_z \\ &= (P(z)-P_0)\times R^2\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi\times\vec{e}_r\cdot\vec{e}_z \\ &= \mu_0 g(h-z)\times R^2\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi\times\cos\theta\end{aligned}$$

L'angle θ est compris entre θ_h tel que $\cos\theta_h = h/R$ et $\pi/2$. La résultante s'écrit donc

$$\begin{aligned}F_z &= \mu_0 g R^2 \iint (h-z)\sin\theta\,\cos\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi \\ &= \mu_0 g R^2 \int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi}\mathrm{d}\varphi \int_{\theta=\theta_h}^{\theta=\pi/2}(h-z)\sin\theta\,\cos\theta\,\mathrm{d}\theta\end{aligned}$$

Une difficulté pour le calcul de l'intégrale vient du fait que z et θ ne sont pas deux variables indépendantes, il est donc nécessaire d'en choisir une des deux. Ici, il est probablement plus simple de privilégier z ... mais il faut exprimer $\mathrm{d}\theta$ en fonction de $\mathrm{d}z$. Puisque $z = R\cos\theta$, on a alors

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\theta} = -R\sin\theta \qquad \text{donc} \qquad \mathrm{d}z = -R\,\sin\theta\,\mathrm{d}\theta$$

Ainsi, en prenant garde à conserver l'ordre des bornes comme sur l'intégrale en θ,

$$F_z = \mu_0 g R^2 \times 2\pi \times \int_h 0 - (h-z)\frac{z}{R}\frac{\mathrm{d}z}{R}$$

Le signe $-$ permet ensuite d'inverser les bornes, d'où

$$F_z = 2\pi\mu_0 g \int_0 h(h-z)z\mathrm{d}z$$

Le calcul de l'intégrale conduit alors à

$$F_z = 2\pi\,\mu_0 g\left[\frac{hz^2}{2} - \frac{z^3}{3}\right]_0^h = 2\pi\,\mu_0 g\left(\frac{h^3}{2} - \frac{h^3}{3}\right)$$

et finalement

$$\boxed{\vec{F} = \pi\mu_0 g\frac{h^3}{3}\vec{e}_z\,.}$$

3 Lorsque l'entonnoir est posé au fond, il subit son poids, la force pressante et la force de réaction du fond $\vec{N}$. À l'équilibre,

$$m\vec{g} + \vec{F} + \vec{N} = \vec{0} \qquad \text{d'où} \qquad \vec{N} = \left(-mg + \pi\mu_0 g\frac{h^3}{3}\right)\vec{e}_z$$

La hauteur critique pour laquelle l'entonnoir décolle est celle où $\vec{N}$ s'annule, soit

$$\pi\mu_0 g\frac{h_\mathrm{c}^3}{3} = mg \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{h_\mathrm{c} = \left(\frac{3m}{\pi\mu_0}\right)^{1/3}}$$

Pour un entonnoir de 100 g, on obtient $h_\mathrm{c} \simeq 5\,\mathrm{cm}$: l'expérience est parfaitement réalisable !

Exercice 7 : Hublot d'aquarium

1 L'axe (Oz) est ascendant et l'eau est un liquide incompressible de masse volumique ρ, donc le champ de pression est donné par

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}z} = -\rho g \qquad \text{soit} \qquad \int_{P_0}^{P(z)} \mathrm{d}P = -\rho g \int_H^z \mathrm{d}z$$

si bien que

$$\boxed{P(z) = P_0 - \rho g(z - H) = P_0 + \rho g(H - z)\,.}$$

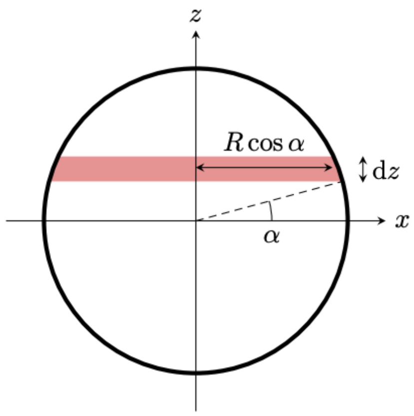
2 De la trigonométrie élémentaire donne

$$z = R \sin\alpha\,.$$

On a donc

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\alpha} = R\cos\alpha \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{\mathrm{d}z = R\,\cos\alpha\,\mathrm{d}\alpha\,.}$$

> *Pour procéder à un changement de variable dans les différentielles (c'est-à-dire dans les éléments infinitésimaux), il est en général plus naturel de commencer par calculer la dérivée puis de la traiter comme une fraction de différentielle.*



3 On assimile la portion de hublot à un rectangle de côtés $2R\cos\alpha$ et $\mathrm{d}z$, voir figure 3. Sa surface vaut donc

$$\mathrm{d}S = 2R\cos\alpha \times \mathrm{d}z = 2R\cos\alpha \times R\,\cos\alpha\,\mathrm{d}\alpha \qquad \text{soit} \qquad \boxed{\mathrm{d}S = 2R^2\,\cos^2\alpha\,\mathrm{d}\alpha\,.}$$

4 Supposons le vecteur $\vec{e}_y$ dirigé de l'eau vers l'air. La bande de hublot comprise entre les ordonnées z et $z + \mathrm{d}z$ subit côté air une force $-P_0\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z\,\vec{e}_y$ et côté eau une force $+P(z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z\,\vec{e}_y$. La résultante de ces forces s'écrit

$$\overrightarrow{\mathrm{d}F}(z) = (P(z) - P_0)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z\,\vec{e}_y = \rho g(H - z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z\,\vec{e}_y\,.$$

En privilégiant la variable α, on en déduit

$$\begin{aligned}
\vec{F} &= \int_{-R}^{R} \overrightarrow{\mathrm{d}F}(z) \\
&= \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \rho g(H - R\sin\alpha) \times 2R^2\,\cos^2\alpha\,\mathrm{d}\alpha\,\vec{e}_y \\
&= 2\rho g H R^2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2\alpha\,\mathrm{d}\alpha\,\vec{e}_y - 2\rho g R^3 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin\alpha\,\cos^2\alpha\,\mathrm{d}\alpha\,\vec{e}_y \\
&= 2\rho g H R^2 \times \frac{\pi}{2}\vec{e}_y + \vec{0}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\vec{F} = \pi\rho g H R^2 \vec{e}_y}$$

5 L'expression de la force s'avère être identique à celle qu'on aurait obtenue si le hublot était soumis à une pression uniforme, égale à la pression au centre. Cela peut se comprendre par symétrie : une bande mésoscopique de hublot située à $z > 0$ subit une écart de pression $-\rho g z$ par rapport à la bande centrale ... mais la bande située en $z' = -z$ subit un écart de pression opposé. Ces deux écarts se compensent donc lorsque l'on calcule la résultante.

Poussée d'Archimède

Exercice 8 : Oscillation d'un flotteur

Dans tout l'exercice, on étudie le mouvement du cylindre (section S, hauteur H) dans le référentiel terrestre, supposé galiléen. Deux approches sont possibles dans le bilan des forces :

- ou bien prise en compte explicite des forces de pression sur la face supérieure et inférieure du cylindre (il y a compensation par symétrie sur les faces latérales) ;
- ou bien prise en compte de la poussée d'Archimède.

Attention ! Ces deux approches sont incompatibles : la poussée d'Archimède, par définition, **EST** la résultante des forces de pression.

La pression dans l'eau est donnée par la loi de l'hydrostatique,

$$P(z) = P_{\text{atm}} + \rho_0 g z \,.$$

$\boxed{1}$ **Première approche : forces de pression.**

Bilan des forces :

- Force de pression sur la face supérieure, supposée émergée : $+P_{\text{atm}} S \vec{e}_z$;
- Force de pression sur la face inférieure, supposée immergée : $-(P_{\text{atm}} + \rho_0 g z) S \vec{e}_z$;
- Poids du flotteur : $\rho \, SH \, \vec{e}_z$.

Le cylindre étant à l'équilibre ($z = z_0 = \text{cte}$), d'après le théorème de la résultante cinétique projeté sur l'axe vertical,

$$0 = P_{\text{atm}} S - (P_{\text{atm}} + \rho_0 g z_0) S + \rho H S g \qquad \text{soit} \qquad 0 = -\rho_0 g z_0 S + \rho H S g \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{z_0 = \frac{\rho}{\rho_0} H \,.}$$

Deuxième approche : poussée d'Archimède.

Bilan des forces :

- Poussée d'Archimède : le volume de cylindre immergé dans l'eau vaut Sz, donc en négligeant l'effet de l'air la poussée d'Archimède s'écrit $-\rho_0 \, Sz \, g \vec{e}_z$
- Poids du flotteur : $\rho \, SH \, g \vec{e}_z$.

Le TRC donne cette fois

$$0 = -\rho_0 \, S z_0 \, g + \rho \, SH \, g$$

ce qui est bien sûr la même équation que précédemment.

$\boxed{2}$ On impose cette fois $z = H$ car le cylindre est totalement immergé, mais il faut prendre en compte la force F exercée sur le flotteur dans le bilan des forces. Le TRC, toujours à l'équilibre, donne désormais

$$0 = -\rho_0 \, SH \, g + \rho \, SH \, g + F \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{F = (\rho_0 - \rho) H S g \,.}$$

$\boxed{3}$ Le TRC (cette fois hors équilibre) s'écrit

$$\rho H S \frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}t^2} = -\rho_0 \, S z \, g + \rho \, SH \, g \,. \qquad \text{soit} \qquad \frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\rho_0 g}{\rho H} z = g \,.$$

On identifie l'équation du mouvement d'un oscillateur harmonique de pulsation propre

$$\omega_0^{\,2} = \frac{\rho_0 g}{\rho H}$$

d'où on déduit la période

$$\boxed{T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{\rho H}{\rho_0 g}} \,.}$$

Champ de pression

Exercice 9 : Champ de pression dans l'atmosphère

***1 -** La dérivée étant constante, on a, par séparation des variables,*

$$\int_{T_0}^{T(z)} dT = -k\int_0^z dz \qquad \text{soit} \qquad \boxed{T(z) = T_0 - kz\,.}$$

***2 -** D'après la relation de la statique des fluides,*

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}z} = -\rho g = -\frac{MP(z)}{RT(z)}g\,.$$

Cette équation différentielle se résout par séparation de variables,

$$\int_{P_0}^{P(z)} \frac{dP}{P} = -\frac{Mg}{R}\int_0^z \frac{dz}{T_0 - kz} = +\frac{Mg}{Rk}\int_0^z \frac{-k\,dz}{T_0 - kz}$$

On en déduit

$$\ln\frac{P(z)}{P_0} = \frac{Mg}{Rk}\ln\frac{T_0 - kz}{T_0}$$

$$\frac{P(z)}{P_0} = \left(\frac{T_0 - kz}{T_0}\right)^{Mg/Rk}$$

$$\boxed{P(z) = P_0\left(1 - \frac{kz}{T_0}\right)^{Mg/Rk}}$$

Exercice 10 : Ballon sonde

$\boxed{1}$ Relation de la statique des fluides (z vers le haut) :

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}z} = -\rho g$$

Avec l'équation d'état des gaz parfaits,

$$PV = \frac{m}{M_\mathrm{a}}RT \qquad \text{d'où} \qquad \rho = \frac{M_\mathrm{a}P}{RT}$$

En séparant les variables,

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}z} = -\frac{M_\mathrm{a}P}{RT}g \qquad \text{soit} \qquad \frac{\mathrm{d}P}{P} = -\frac{M_\mathrm{a}g}{RT_0}\frac{\mathrm{d}z}{1-\alpha z} = \frac{M_\mathrm{a}g}{\alpha RT_0}\left(\frac{-\alpha\mathrm{d}z}{1-\alpha z}\right)\,.$$

On intègre ensuite entre l'altitude 0 et l'altitude z, ce qui donne

$$\ln\frac{P(z)}{P_0} = \frac{M_\mathrm{a}g}{\alpha RT_0}\ln\frac{1-\alpha z}{1}$$

et on trouve enfin en prenant l'exponentielle

$$\boxed{P(z) = P_0(1-\alpha z)^\beta \qquad \text{avec} \qquad \beta = \frac{M_\mathrm{a}g}{\alpha RT_0}\,.}$$

$\boxed{2}$ D'après la question précédente, il vient directement

$$\boxed{\rho(z) = \frac{M_\mathrm{a}P(z)}{RT(z)} = \frac{M_\mathrm{a}P_0}{RT_0}(1-\alpha z)^{\beta-1}}$$

$\boxed{3}$ L'hélium est en équilibre thermique et mécanique avec l'atmosphère, c'est-à-dire à même pression et température, donc la loi des gaz parfaits donne

$$n_{\mathrm{He}} = \frac{P(z)V_0}{RT(z)} = \frac{P_0(1-\alpha z)^\beta V_0}{RT_0(1-\alpha z)} \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{m_{\mathrm{He}} = \frac{P_0 V_0 M_{\mathrm{He}}}{RT_0}(1-\alpha z)^{\beta-1}\,.}$$

$\boxed{4}$ Le ballon subit son poids $m_0\vec{g}$, celui de la charge $m\vec{g}$, celui de l'hélium $m_{\mathrm{He}}\vec{g}$ et la poussée d'Archimède

$$\vec{\Pi}_{\mathrm{A}}(z) = -\rho(z)V_0\,\vec{g}\,.$$

La masse maximale qu'il peut emporter à l'altitude z se traduit par une condition d'équilibre : le ballon est immobile car trop lourd pour monter davantage. Ainsi, en projection sur $\vec{e}_z$,

$$m_0\cancel{g} + m_{\max}(z)\cancel{g} + \frac{P_0V_0M_{\mathrm{He}}}{RT_0}(1-\alpha z)^{\beta-1}\cancel{g} - \frac{M_{\mathrm{a}}P_0}{RT_0}(1-\alpha z)^{\beta-1}V_0\cancel{g} = 0$$

soit

$$m_0 + m_{\max}(z) + \frac{P_0V_0}{RT_0}(M_{\mathrm{He}} - M_{\mathrm{a}})(1-\alpha z)^{\beta-1} = 0$$

ou encore

$$\boxed{m_{\max}(z) = \frac{P_0V_0}{RT_0}(M_{\mathrm{a}} - M_{\mathrm{He}})(1-\alpha z)^{\beta-1} - m_0\,.}$$

$\boxed{5}$ Numériquement, pour $T_0 = 15\,°\mathrm{C}$, je trouve

$$\boxed{m_{\max}(z{=}0) = 34\,\mathrm{kg} \qquad \text{et} \qquad m_{\max}(z{=}10\,\mathrm{km}) = 11\,\mathrm{kg}\,.}$$