Mécanique 2 – Dynamique du point

On a vu dans le chapitre précédent les outils permettant de décrire le mouvement d'un point ou d'un solide. On va maintenant s'attacher à l'étude des **causes du mouvement** et des principes posés et exploités en dynamique pour en déduire le mouvement d'un système.

Les bases de la dynamique classique ont été posées par Galilée (1564 - 1642) et Newton (1643 - 1727). Les lois qu'ils ont formulées doivent cependant être prises comme des principes, c'est à dire des affirmations non démontrables. Ces lois sont en très bon accord avec de nombreux résultats expérimentaux ; elles ont cependant un domaine de validité au-delà duquel elles ne sont plus applicables – dans le domaine de l'infiniment petit, où la mécanique quantique prend le pas sur la mécanique classique, et l'infiniment grand ou à des vitesses proches de c et où l'on doit appliquer la théorie de la relativité.

Dans ce cours nous resterons dans le domaine de validité de la mécanique classique. Dans ce cadre, les interactions sont portées par des **forces**, représentées mathématiquement par des vecteurs, qui vont avoir une influence sur l'accélération des corps considérés.

1. Concepts de la dynamique : masse, quantité de mouvement, force

1.1. Masse et inertie

Commençons par un fait d'expérience : il est plus difficile de communiquer une certaine vitesse à une boule de pétanque qu'à une balle de ping-pong. Et de même, il sera plus difficile de stopper cette boule que cette balle.

La vitesse d'un corps ne suffit donc pas à décrire son mouvement dans tous ses aspects. En plus de ses grandeurs cinétiques, il est nécessaire de caractériser la difficulté de modifier le mouvement d'un corps : c'est la notion d'inertie. **Plus un corps a d'inertie, plus il est difficile de l'accélérer ou de le ralentir.**

L'inertie d'un corps est quantifiée par sa masse : plus la masse est élevée, plus il sera difficile de mettre le corps en mouvement ou de changer ce mouvement.

Rappelons que pour l'instant nous assimilons les corps à des **points matériels** (leur centre de gravité). À ces points matériels, nous allons désormais associer une grandeur scalaire : leur masse.

DEFINITION

Pour un point matériel, la propriété d'inertie est représentée par un scalaire positif appelé **masse**, généralement noté m. Plus la masse est grande, plus il est difficile de modifier sa vitesse.

La masse est **invariante dans le temps** et **ne dépend pas du référentiel**. C'est une **caractéristique intrinsèque** du point matériel.

L'unité de masse est le kilogramme (kg) dans le Système international d'unités (SI).

1.2. Quantité de mouvement

DEFINITION

Le vecteur **quantité de mouvement** d'un point matériel M de masse m se mouvant avec une vitesse $\vec{v}_{M/\mathcal{R}}$ par rapport à un référentiel $\mathcal{R}$ est défini par :

$$\vec{p}_{M/\mathcal{R}} = m\vec{v}_{M/\mathcal{R}}$$

1.3. Interactions et forces

En dynamique, la capacité d'un objet à modifier le mouvement d'un autre objet est appelé **force**.

DEFINITION

On appelle **force** la grandeur vectorielle décrivant l'interaction capable de modifier et / ou produire un mouvement ou une déformation du système (mais en mécanique du point nous ne nous intéresserons pas aux déformations).

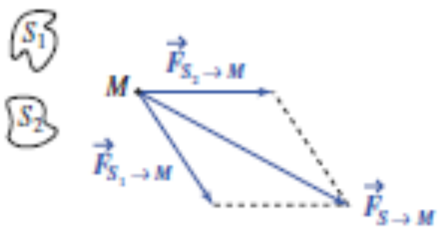
Une force exercée par un système S sur un point matériel M est notée $\vec{F}_{S\rightarrow M}$. La norme $\|\vec{F}_{S\rightarrow M}\|$ est appelée **intensité** de la force. Elle s'exprime en Newton (N).

Les théories physiques actuelles postulent l'existence de quatre interactions fondamentales :

- **L'interaction électromagnétique** : elle s'exerce entre deux objets chargés.
- **L'interaction gravitationnelle** : elle s'exerce entre deux objets massifs.
- **L'interaction forte** : sert à assurer la cohésion des quarks (particules élémentaires) au sein des protons et des neutrons. C'est également elle, indirectement, qui permet la cohésion des noyaux atomiques.
- **L'interaction faible** : elle est responsable d'un certain type de désintégration spontanée des noyaux radioactifs.

Additivité des forces

La force résultante de plusieurs actions mécaniques est égale à la somme vectorielle des forces dues à chacune de ces actions.



Si S est constitué par la réunion des S_i cette additivité se traduit par :

$$\vec{F}_{S\rightarrow M} = \sum_i \vec{F}_{S_i\rightarrow M}$$

Ainsi, un satellite évoluant autour de la Terre évolue dans le champ de gravitation créé par l'ensemble des points matériels qui constituent la planète et les autres astres.

2. Postulats de la dynamique

2.1. Première loi de Newton : principe d'inertie

Nous énoncerons ce principe de manière rigoureuse plus bas mais en un mot il stipule que si un objet n'est soumis à aucune force (il est alors dit isolé) il reste au repos s'il était au repos et il garde un mouvement rectiligne uniforme s'il était en mouvement.

Il a fallu des siècles, voire des millénaires, pour arriver au principe d'inertie car il est contre intuitif. Longtemps, on a pensé que pour imposer une vitesse constante à un objet il fallait exercer une action constante : si on veut déplacer un meuble, il faut pousser jusqu'à l'endroit voulu ! Mais un meuble n'est pas un objet isolé : il est soumis aux frottements du sol et l'action de pousser sert à compenser cette résistance … nous y reviendrons.

DEFINITIONS

- Un point matériel est **isolé** s'il n'est soumis à aucune action mécanique extérieure.
- Un point matériel est **pseudo-isolé** s'il est soumis à des actions mécaniques extérieures qui se compensent, c'est-à-dire de résultante nulle.

1ère loi de Newton (principe d'inertie)

Il existe une classe de référentiels privilégiés, appelés **référentiels galiléens**, dans lesquels tout point matériel isolé est animé d'un **mouvement rectiligne uniforme**.

Ce principe est fondamental car il a permis à Newton de définir deux notions importantes : le référentiel galiléen et les forces. Concernant les forces et l'inertie, ce principe énonce une chose que nous avons déjà énoncée plus haut : une force est une action capable de modifier le mouvement d'un objet c'est-à-dire de vaincre son inertie.

Qu'est-ce qu'un référentiel galiléen ?

La notion de référentiel galiléen est très théorique et a fait l'objet de nombreux questionnements, notamment au XXe siècle avec les travaux d'Einstein sur la relativité générale ? Pourquoi y aurait-il dans l'Univers des référentiels privilégiés ? Cela est contraire aux principes de la cosmologie, et donc en général on considèrera qu'un référentiel est galiléen **par approximation** (selon l'échelle de temps et d'espace de l'expérience). Il est possible qu'il existe tout de même un référentiel privilégié dans l'univers : le fond diffus cosmologique (CMB).

En réalité, c'est le principe d'inertie qui permet de définir les référentiels galiléens : ce sont les référentiels dans lesquels il est vérifié !

À RETENIR

Un référentiel en translation rectiligne uniforme par rapport à un référentiel galiléen est lui-même galiléen. Il existe donc une infinité de référentiels galiléens.

Voici les référentiels que l'on pourra considérer comme galiléens, selon les conditions de l'expérience :

- **Le référentiel héliocentrique**
  On peut le supposer galiléen pour des phénomènes très longs car le mouvement orbital du Soleil au sein de notre Galaxie est de l'ordre de 230 millions d'années. Ce référentiel est adapté à l'étude du mouvement des planètes au sein du système solaire.

- **Le référentiel géocentrique**
  Ce référentiel peut être considéré comme galiléen lorsqu'on peut négliger le mouvement orbital de la Terre autour du soleil – de période d'environ 365 jours. Il est adapté à l'étude du mouvement des satellites autour de la Terre.

- **Le référentiel terrestre**
  Peut être considéré comme galiléen lorsqu'on peut négliger la rotation de la Terre sur elle-même – mouvement de période d'environ 24 heures. Il est adapté à l'étude de phénomènes terrestres de courte durée.

2.2. Deuxième loi de Newton : principe fondamental de la dynamique

C'est ce principe qui sera au centre des problèmes de mécanique : il va nous permettre de mathématiser les phénomènes en liant les différents concepts vus précédemment, notamment les concepts de la dynamique (masse, force) et ceux de la cinématique.

2ème loi de Newton (principe fondamental de la dynamique)

Dans un référentiel galiléen $\mathcal{R}$ la dérivée de la quantité de mouvement $\vec{p}_{M/\mathcal{R}}$ d'un point matériel M de masse m est égale à la somme des forces extérieures $\vec{F}_{i\to M}$ s'exerçant sur M :

$$\left(\frac{d\,\vec{p}_{M/\mathcal{R}}}{dt}\right)_{\mathcal{R}} = \sum_i \vec{F}_{i\to M}$$

Dans le cas où la masse est constante on peut écrire :

$$m\vec{a}_{M/\mathcal{R}} = \sum_i \vec{F}_{i\to M}$$

REMARQUE

Si la résultante des forces est nulle ($\sum_i \vec{F}_{i\to M} = \vec{0}$) on a $\vec{a}_{M/\mathcal{R}} = \vec{0}$ ce qui signifie que l'objet persiste dans son mouvement (ou son repos). La deuxième loi de Newton contient donc le principe d'inertie.

2.3. Troisième loi de Newton : principe des actions réciproques

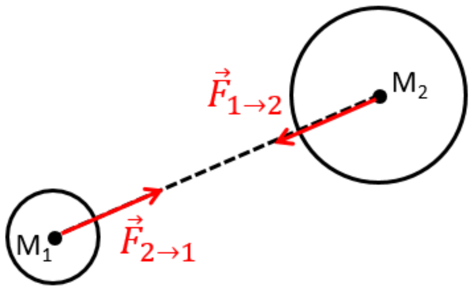
Lorsque Newton voit la pomme tomber il a l'idée de la gravitation **universelle** : non seulement la Terre attire la pomme mais **la pomme attire la Terre avec la même force** !!! Cette idée est également très contre-intuitive. Mais si je frappe la table avec ma main, je ressens une douleur qui prouve qu'au moment de cette action la table frappe aussi ma main… En réalité on ne peut pas isoler l'action d'un corps sur un autre corps : une force est toujours une **interaction**, une action réciproque.

3ème loi de Newton (principe des actions réciproques)

Soit deux points matériels M_1 et M_2 de masses respectives m_1 et m_2. Si M_1 exerce une force $\vec{F}_{1\to2}$ sur M_2 alors M_2 exerce une force $\vec{F}_{2\to1}$ sur M_1 telle que :

$$\vec{F}_{2\to1} = -\vec{F}_{1\to2}$$

Les deux forces sont donc portées par la droite M_1M_2 et de sens opposés.



2.4. Méthode de résolution d'un problème en dynamique du point

POINT METHODE

1. Faire un schéma clair pour bien visualiser le problème (capital).
2. Définir le système étudié et ses caractéristiques.
3. Choisir le référentiel et préciser s'il est supposé galiléen ou non.
4. Faire un bilan des forces : lister toutes les forces s'exerçant sur le système.
5. Représenter les forces sur le schéma.
6. Choisir une méthode de résolution : PFD (ou méthode énergétique vue ultérieurement).
7. Définir la base adéquate puis écrire les vecteurs position, vitesse, accélération dans cette base.
8. Appliquer le PFD et le projeter sur les vecteurs unitaires de la base : on obtient les équations différentielles du mouvement.
9. Résoudre les équations précédentes lorsque cela est possible et / ou demandé.
10. Eventuellement : éliminer le temps dans les équations pour obtenir l'équation de la trajectoire.
11. Analyser physiquement le résultat.

3. Principales forces en mécanique newtonienne

Dans cette partie nous étudierons les forces suivantes :

- Interactions à distance : cas de l'interaction gravitationnelle.
- Interactions de contact : réaction d'un plan, frottement fluide, action d'une corde, action d'un ressort .

3.1. Interaction gravitationnelle

En 1687, Newton énonce l'idée que la chute des corps sur Terre et le mouvement des astres (décrit notamment par Kepler) étaient dus à une seule et même cause : la **gravitation universelle**.

DEFINITION

Soit deux points matériels M_1 et M_2 de masses respectives m_1 et m_2. On définit r comme la distance $\left\|\overrightarrow{M_1M_2}\right\|$ et le vecteur unitaire $\vec{u}_{12} = \frac{\overrightarrow{M_1M_2}}{r}$ dirigé de M_1 vers M_2. La force gravitationnelle exercée par M_1 sur M_2 s'écrit :

$$\vec{F}^{G}_{1\to2} = -\mathcal{G}\frac{m_1m_2}{r^2}\vec{u}_{12}$$

avec $\mathcal{G} = 6{,}67.10^{-11}\ m^3.kg^{-1}.s^{-2}$ la constante gravitationnelle.

Notion de poids

Dans le cadre de ce cours, nous n'aurons pas à utiliser la loi de la gravitation universelle, telle qu'énoncée ci-dessus. En effet, nous nous limiterons à l'attraction terrestre sur des corps situés au voisinage de sa surface.

A VOUS DE JOUER

Considérons un point matériel M de masse m situé à la surface de la Terre. On note (Oz) l'axe correspondant à la verticale ascendante locale, l'origine de l'axe étant située au niveau du sol. On note $R_T = 6380\ km$ le rayon de la Terre et $m_T = 5{,}972.10^{24}\ kg$ sa masse.

1. Rappeler l'expression de la force gravitationnelle exercée par la Terre sur un point matériel M quelconque. On l'exprimera dans la base la plus adaptée.

2. Dans le cas particulier du point M à la surface de la Terre, comment peut-on réécrire l'expression de la force gravitationnelle en base cartésienne ? On s'appuiera sur un schéma.

3. En déduire que, dans ce cas particulier, la force gravitationnelle est **constante**. On l'appelle alors le poids $\vec{P}$, que l'on peut écrire comme :
$$\vec{P} = m\vec{g}$$
avec $\vec{g}$ un vecteur constant que l'on explicitera dans la base cartésienne.

4. Calculer la valeur de $\|\vec{g}\|$.

On pourrait objecter que tous les points au niveau du sol ne sont pas à la même distance du centre de la Terre donc soumis à des forces gravitationnelles différentes. On pourrait penser par exemple au Mont Everest, qui culmine à 8,5 km, ou aux méandres du Grand Canyon … Pourtant, c'est bien peu comparé au 12 750 km de diamètre de notre planète. C'est dire que les écarts de relief équivalent à moins de 0,1 % du diamètre de la Terre. Autrement dit, **la surface terrestre est lisse à $\pm 0,1$ %, ce qui correspond à une perfection que n'atteignent pas les boules de billard**. Considérer que la force de gravitation est la même pour tous les corps situés à la surface de la Terre est donc une très bonne approximation !

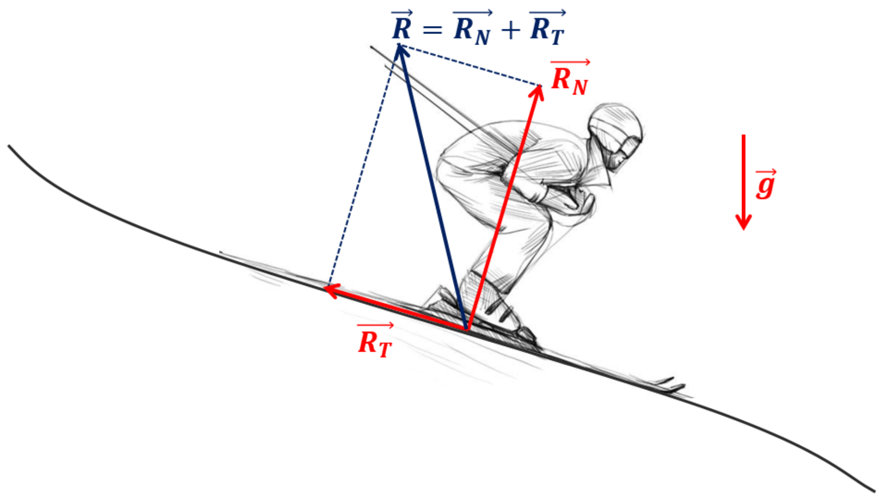
DEFINITION

Le **poids** $\vec{P}$ est la force gravitationnelle exercée par la Terre sur un point matériel M de masse m situé **au niveau du sol**. Elle exprime comme suit :

$$\vec{P} = m\vec{g}$$

$\vec{g}$ est dirigé vers le centre de la Terre (selon la verticale, vers le bas) et sa norme vaut $g = 9{,}81\ m.s^{-2}$, on la nomme **accélération de la pesanteur**.

3.2. Réaction d'un support solide



Un skieur sur une piste a naturellement un mouvement descendant, en raison de la pesanteur. Cependant, il est en contact avec un support, la piste, qui l'empêche de tomber dans le vide. Ce support (on le supposera solide) a deux actions sur le skieur : la première l'empêche de s'enfoncer dans le sol, la seconde ralenti son mouvement par frottement dit solide. Cette réaction du support est une force notée $\vec{R}$ qui peut donc être décomposée en deux termes, deux vecteurs perpendiculaires :

- La **réaction normale** $\vec{R_N}$: cette action est perpendiculaire au support, dirigée vers le haut et s'oppose donc à la pesanteur. C'est cette force qui empêche un objet de tomber quand on le pose sur une table par exemple.
- La **réaction tangentielle** $\vec{R_T}$: cette action est dans le plan de la surface de contact et s'oppose toujours au mouvement. C'est la **force de frottement solide**. Plus cette force est grande, plus la glisse est difficile !

La réaction du support s'exprime donc comme suit :

$$\vec{R} = \vec{R_N} + \vec{R_T}$$

REMARQUES

- La composante normale existe toujours **tant qu'il y a contact**. On parle de rupture de contact lorsque $\vec{R_N} = \vec{0}$
- La composante tangentielle n'existe que s'il y a des frottements solides. Les frottements entre nos pieds et le sol existent : c'est ce qui nous permet de marcher. Au contraire, sur de la glace, les frottements sont très faibles, ce qui rend la marche très difficile ! En l'absence totale de frottements, nous ferions du sur place...

Lois de Coulomb des frottements solides

Dans le cas des actions de contact avec un solide il faut considérer deux cas :

- Cas du **glissement** : le système étudié est en mouvement avec une vitesse $\vec{v}$ (c'est le cas du skieur) et la force tangentielle ne fait que ralentir le mouvement sans pouvoir s'y opposer.
- Cas du **non-glissement** : le système est au repos, et sa situation n'« oblige » pas le support à trop résister par sa composante tangentielle : objet sur une table horizontale (dans ce cas la composante tangentielle est nulle) ou sur un plan incliné avec une pente faible.

Les lois de Coulomb permettent de prévoir si un objet sera en situation de glissement ou non :

LOIS DE COULOMB DES FROTTEMENTS SOLIDES

- **Cas du glissement**
  La force de frottement $\overrightarrow{R_T}$ est **colinéaire** et de **sens opposé** à la vitesse $\vec{v}$ du système. Sa norme vérifie :

$$\|\overrightarrow{R_T}\| = \mu_d \|\overrightarrow{R_N}\|$$

  μ_d est appelé coefficient de frottement dynamique

- **Cas du non-glissement**
  La force de frottement $\overrightarrow{R_T}$ est telle que la somme des forces appliquées au système est nulle. Sa norme vérifie la relation :

$$\|\overrightarrow{R_T}\| \leq \mu_s \|\overrightarrow{R_N}\|$$

  μ_s est appelé coefficient de frottement statique

Remarque : $\boldsymbol{\mu_d < \mu_s}$ mais dans les exercices nous supposerons toujours que $\boldsymbol{\mu_d = \mu_s}$

À VOUS DE JOUER

Préciser, dans les cas suivants, si la situation est un cas de glissement ou de non glissement :

- Cube immobile sur un plan incliné
- Cube glissant sur un plan incliné
- Boite de conserve placée sur un tapis roulant horizontal et se déplaçant à la même vitesse que le tapis.
- Vélo roulant sans dérapage sur une route.
- Moto dont la roue dérape au démarrage.

3.3. Frottement fluide

Lorsque le skieur dévale la piste, il n'est pas soumis qu'à la résistance du sol. L'air exerce aussi une action sur lui, qui freine son mouvement. Mais cette action est de nature différente que la précédente car l'air est un **fluide**. Le frottement exercé par un fluide dépend de la **vitesse** de l'objet en mouvement.

DEFINITION

Si la vitesse $\vec{v}_{M/\mathcal{R}}$ du point matériel par rapport au fluide est relativement faible, alors la force de frottement exercée par le fluide s'écrit :

$$\vec{f} = -\alpha \vec{v}_{M/\mathcal{R}}$$

où α est une constante.

À VOUS DE JOUER

Une balle, modélisée par un point matériel M de masse m, est lâchée à l'instant $t = 0\ s$ depuis le point O avec une vitesse v_0 (algébrique). La balle subit des frottements fluides de la forme $\overrightarrow{f} = -\alpha\overrightarrow{v}_{M/\mathcal{R}}$. On définit l'axe (Oz) comme l'axe **vertical descendant**.

1. Etablir l'équation vérifiée par $v_z(t)$.

2. On cherche dans un premier temps à analyser l'équation obtenue sans la résoudre analytiquement.
   (a) A quelle condition sur v_z l'accélération de la balle est positive ? Comment évolue alors la vitesse ?

   (b) Même question pour une accélération négative.

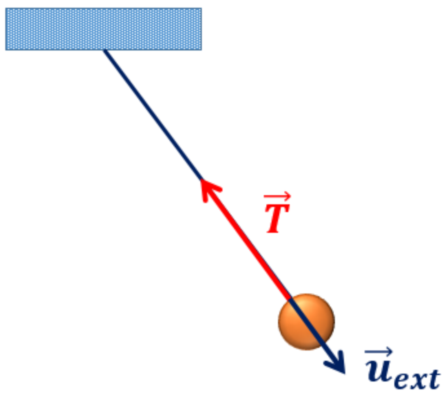
   (c) En déduire que la balle atteint nécessairement une vitesse limite v_{lim}, dont on précisera l'expression en fonction de m, g et α.

3. On souhaite à présent résoudre l'équation analytiquement.
   (a) A quel type d'équation correspond l'équation du mouvement ?

   (b) La résoudre analytiquement et tracer la courbe $v_z = f(t)$.

   (c) Vérifier la cohérence avec les résultats précédents.

3.4. Force de rappel inélastique (corde, fil)

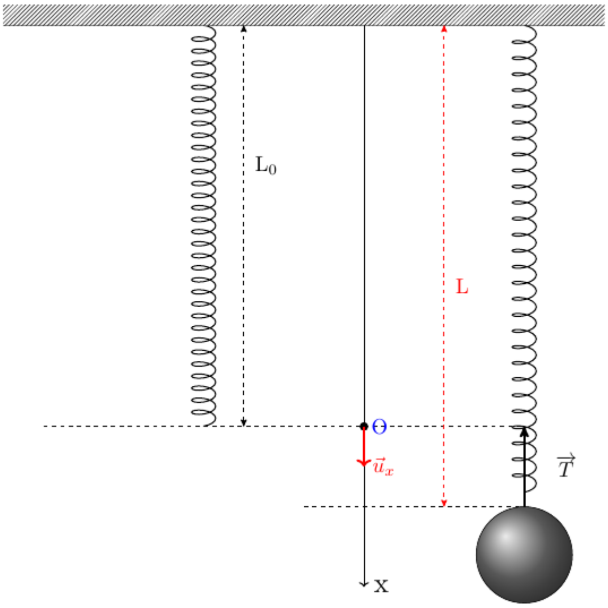


Un solide est dit inélastique et parfaitement souple lorsqu'il est **indéformable**. C'est généralement l'hypothèse que l'on fait avec un fil ou une corde tendue. L'action exercée par cette corde sur l'objet qui y est attaché est alors **uniforme**, c'est-à-dire la même en tout point de la corde. Elle reste cependant **indéterminée**. On appelle **tension** cette action et on la note :

$$\vec{T} = -T\vec{u}_{ext}$$

Avec $T > 0$ la norme de la tension et $\vec{u}_{ext}$ un vecteur unitaire parallèle à la corde et orienté vers le point d'attache.

3.5. Force de rappel élastique (ressort)



Contrairement à une corde, un ressort est élastique : il a la capacité de se déformer lorsqu'on exerce une contrainte, et de reprendre sa forme initiale lorsqu'on supprime la contrainte.

Un ressort est caractérisé par sa **longueur au repos** (ou longueur à vide) l_0 et sa **constante de raideur** k qui caractérise sa rigidité (plus k est grand plus il est difficile à déformer).

Lorsqu'on impose une contrainte au ressort, celui-ci se déforme et prend une longueur l :

- Si $l - l_0 > 0$ cela correspond à une élongation
- Si $l - l_0 < 0$ cela correspond à une compression

La force exercée par le ressort change de sens selon qu'on le comprime ou qu'on l'étire. Par ailleurs, plus on le déforme, plus il résiste. La **loi de Hooke** permet de rendre compte de ce comportement.

LOI DE HOOKE

Lorsqu'un ressort est déformé, il exerce à chacune de ses extrémités une force $\vec{F}$ (parfois notée $\vec{T}$ puisqu'il s'agit d'une tension) telle que :

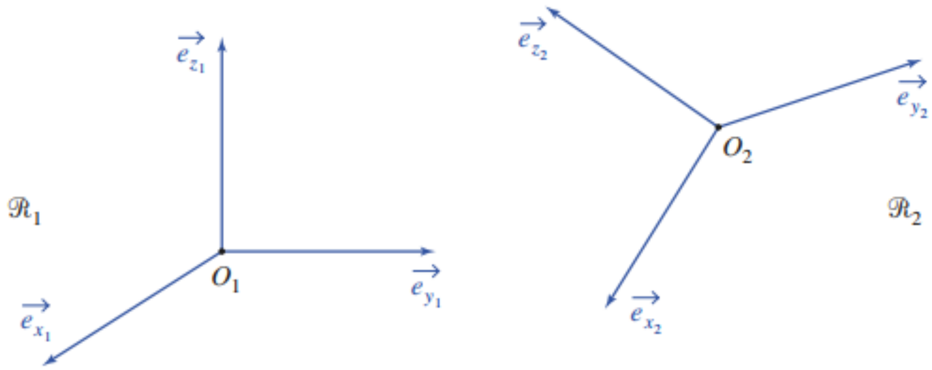
$$\vec{F} = -k(l - l_0)\vec{u}_{ext}$$

Avec k la constante de raideur du ressort exprimée en N.m^{-1} et $\vec{u}_{ext}$ un vecteur unitaire parallèle à l'axe du ressort et dirigé vers l'extérieur du ressort.

La force s'oppose donc systématiquement à la déformation.

4.1. Mouvement relatif de deux référentiels

Considérons deux référentiels $\mathcal{R}_1$ et $\mathcal{R}_2$ se déplaçant l'un par rapport à l'autre et désignons par $(O_1; \vec{e}_{x1}, \vec{e}_{y1}, \vec{e}_{z1})$ et $(O_2; \vec{e}_{x2}, \vec{e}_{y2}, \vec{e}_{z2})$ deux repères cartésiens liés respectivement à $\mathcal{R}_1$ et $\mathcal{R}_2$.



À RETENIR

Le mouvement relatif de deux référentiels $\mathcal{R}_1$ et $\mathcal{R}_2$ est la superposition :

- D'une rotation à vitesse angulaire $\vec{\Omega}_{\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1}$ appelé vecteur rotation d'entraînement de $\mathcal{R}_2$ par rapport à $\mathcal{R}_1$;
- D'une translation caractérisée par $\vec{v}(O_2)_{/\mathcal{R}_1} = \left(\frac{d\overrightarrow{O_1O_2}}{dt}\right)_{/\mathcal{R}_1}$ où O_1 et O_2 sont des points fixes (origines des repères en général) de $\mathcal{R}_1$ et $\mathcal{R}_2$ respectivement.

4.2. Rotation et dérivation des vecteurs

L'évolution d'un vecteur $\vec{U}(t)$ peut différer selon qu'elle est observée dans $\mathcal{R}_1$ ou $\mathcal{R}_2$. Nous cherchons ici à relier les dérivées correspondantes $\left(\frac{d\vec{U}}{dt}\right)_{/\mathcal{R}_1}$ et $\left(\frac{d\vec{U}}{dt}\right)_{/\mathcal{R}_2}$. Le résultat ci-dessous sera admis, sa démonstration dépassant le cadre de notre cours.

A RETENIR

$$\left(\frac{d\vec{U}}{dt}\right)_{/\mathcal{R}_1} = \left(\frac{d\vec{U}}{dt}\right)_{/\mathcal{R}_2} + \vec{\Omega}_{\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1} \wedge \vec{U}(t)$$

Où $\vec{\Omega}_{\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1}$ est le vecteur rotation d'entraînement de $\mathcal{R}_2$ par rapport à $\mathcal{R}_1$

4.3. Composition des vitesses

La vitesse d'une point mobile M est définie dans $\mathcal{R}_1$ et $\mathcal{R}_2$ par :

$$\vec{v}(M)_{/\mathcal{R}_1} = \left(\frac{d\overrightarrow{O_1M}}{dt}\right)_{/\mathcal{R}_1}$$

$$\vec{v}(M)_{/\mathcal{R}_2} = \left(\frac{d\overrightarrow{O_2M}}{dt}\right)_{/\mathcal{R}_2}$$

En utilisant la relation du paragraphe précédent nous avons :

$$\vec{v}(M)_{/\mathcal{R}_1} = \left(\frac{d\overrightarrow{O_1O_2}}{dt}\right)_{/\mathcal{R}_1} + \left(\frac{d\overrightarrow{O_2M}}{dt}\right)_{/\mathcal{R}_1} = \left(\frac{d\overrightarrow{O_1O_2}}{dt}\right)_{/\mathcal{R}_1} + \left(\frac{d\overrightarrow{O_2M}}{dt}\right)_{/\mathcal{R}_2} + \vec{\Omega}_{\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1} \wedge \overrightarrow{O_2M}$$

Ce qui peut se réécrire comme suit :

$$\vec{v}(M)_{/\mathcal{R}_1} = \vec{v}(M)_{/\mathcal{R}_2} + \left[\vec{v}(O_2)_{/\mathcal{R}_1} + \vec{\Omega}_{\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1} \wedge \overrightarrow{O_2M}\right]$$

On distingue deux termes dans cette équation :

- $\vec{v}(M)_{/\mathcal{R}_2}$: ce terme sera appelé **vitesse relative**
- $\vec{v}(O_2)_{/\mathcal{R}_1} + \vec{\Omega}_{\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1} \wedge \overrightarrow{O_2M}$: ce terme sera appelé **vitesse d'entraînement**

Nous allons préciser leur signification ci-dessous.

Vitesse absolue / vitesse relative

DEFINITIONS

La **vitesse absolue** est la vitesse du point matériel dans le référentiel de référence (ici $\mathcal{R}_1$) : $\vec{v}(M)_{/\mathcal{R}_1}$

La **vitesse relative** est la vitesse du point matériel dans le référentiel d'étude (donc $\mathcal{R}_2$), en mouvement par rapport au référentiel de référence : $\vec{v}(M)_{/\mathcal{R}_2}$

Point coïncident

Le point coïncident est le point, fixe dans $\mathcal{R}_2$ qui coïncide avec le point M à l'instant t. Par définition, le point coïncident n'a pas de vitesse relative : $\vec{v}(M)_{/\mathcal{R}_2} = \vec{0}$.

Ainsi, on peut définir la vitesse absolue du point coïncident à l'instant t comme suit :

$$\vec{v}(M)_{/\mathcal{R}_1} = \vec{v}(O_2)_{/\mathcal{R}_1} + \vec{\Omega}_{\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1} \wedge \overrightarrow{O_2M}$$

C'est la vitesse qu'aurait le point M dans $\mathcal{R}_1$ s'il était fixe dans $\mathcal{R}_2$, simplement entraîné par le mouvement de ce référentiel. On parle donc de **vitesse d'entraînement**.

En résumé :

LOI DE COMPOSITION DES VITESSES

La vitesse absolue d'un point M dans le référentiel de référence $\mathcal{R}_1$ est donnée par :

$$\vec{v}(M)_{/\mathcal{R}_1} = \vec{v_r}(M) + \vec{v_e}(M)$$

Avec :

- $\vec{v_r}(M)$ la vitesse relative : $\vec{v_r}(M) = \vec{v}(M)_{/\mathcal{R}_2}$
- $\vec{v_e}(M)$ la vitesse d'entraînement : $\vec{v_e}(M) = \vec{v}(O_2)_{/\mathcal{R}_1} + \vec{\Omega}_{\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1} \wedge \overrightarrow{O_2M}$

4.4. Composition des accélérations

Dérivons l'expression de la vitesse absolue telle que nous l'avons écrite précédemment :

$$\vec{v}(M)_{/\mathcal{R}_1} = \left(\frac{d\overrightarrow{O_1O_2}}{dt}\right)_{/\mathcal{R}_1} + \left(\frac{d\overrightarrow{O_2M}}{dt}\right)_{/\mathcal{R}_2} + \vec{\Omega}_{\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1} \wedge \overrightarrow{O_2M}$$

L'accélération absolue sera donc :

$$\vec{a}(M)_{/\mathcal{R}_1} = \left(\frac{d\vec{v}(M)_{/\mathcal{R}_1}}{dt}\right)_{/\mathcal{R}_1}$$

Le premier terme est facile à dériver :

$$\frac{d}{dt}\left[\left(\frac{d\overrightarrow{O_1O_2}}{dt}\right)_{/\mathcal{R}_1}\right]_{/\mathcal{R}_1} = \left(\frac{d^2\overrightarrow{O_1O_2}}{dt^2}\right)_{/\mathcal{R}_1}$$

Pour les deux autres termes nous utilisons la relation :

$$\left(\frac{d\vec{U}}{dt}\right)_{/\mathcal{R}_1} = \left(\frac{d\vec{U}}{dt}\right)_{/\mathcal{R}_2} + \vec{\Omega}_{\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1} \wedge \vec{U}(t)$$

Soit :

$$\vec{a}(M)_{/\mathcal{R}_1} = \left(\frac{d^2\overrightarrow{O_1O_2}}{dt^2}\right)_{/\mathcal{R}_1} + \left(\frac{d^2\overrightarrow{O_2M}}{dt^2}\right)_{/\mathcal{R}_2} + \vec{\Omega}_{\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1} \wedge \left(\frac{d\overrightarrow{O_2M}}{dt}\right)_{/\mathcal{R}_2} + \frac{d}{dt}\left(\vec{\Omega}_{\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1} \wedge \overrightarrow{O_2M}\right)_{/\mathcal{R}_1}$$

Soit encore :

$$\vec{a}(M)_{/\mathcal{R}_1} = \left(\frac{d^2\overrightarrow{O_1O_2}}{dt^2}\right)_{/\mathcal{R}_1} + \left(\frac{d^2\overrightarrow{O_2M}}{dt^2}\right)_{/\mathcal{R}_2} + \vec{\Omega}_{\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1} \wedge \left(\frac{d\overrightarrow{O_2M}}{dt}\right)_{/\mathcal{R}_2} + \frac{d}{dt}\left(\vec{\Omega}_{\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1} \wedge \overrightarrow{O_2M}\right)_{/\mathcal{R}_2}$$
$$+ \vec{\Omega}_{\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1} \wedge \left(\vec{\Omega}_{\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1} \wedge \overrightarrow{O_2M}\right)$$

On peut enfin écrire

$$\vec{a}(M)_{/\mathcal{R}_1} = \left(\frac{d^2\overrightarrow{O_1O_2}}{dt^2}\right)_{/\mathcal{R}_1} + \left(\frac{d^2\overrightarrow{O_2M}}{dt^2}\right)_{/\mathcal{R}_2} + \vec{\Omega}_{\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1} \wedge \left(\frac{d\overrightarrow{O_2M}}{dt}\right)_{/\mathcal{R}_2} + \frac{d\vec{\Omega}_{\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1}}{dt} \wedge \overrightarrow{O_2M}$$
$$+ \vec{\Omega}_{\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1} \wedge \left[\left(\frac{d\overrightarrow{O_2M}}{dt}\right)_{/\mathcal{R}_2} + \vec{\Omega}_{\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1} \wedge \overrightarrow{O_2M}\right]$$

Bonne nouvelle : cette équation n'est pas à connaître par cœur !!

Nous allons la décomposer en trois termes :

- Accélération relative $\vec{a_r}$
- Accélération d'entraînement $\vec{a_e}$
- Accélération de Coriolis $\vec{a_c}$

Accélération relative

$$\vec{a_r} = \vec{a}(M)_{/\mathcal{R}_2} = \left(\frac{d^2\overrightarrow{O_2M}}{dt^2}\right)_{/\mathcal{R}_2}$$

Accélération d'entraînement

Lorsque la vitesse et l'accélération relatives de M sont annulées nous obtenons l'accélération absolue du point coïncident, qui est l'accélération d'entraînement :

$$\vec{a_e} = \left(\frac{d^2\overrightarrow{O_1O_2}}{dt^2}\right)_{/\mathcal{R}_1} + \frac{d\vec{\Omega}_{\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1}}{dt} \wedge \overrightarrow{O_2M} + \vec{\Omega}_{\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1} \wedge \left(\vec{\Omega}_{\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1} \wedge \overrightarrow{O_2M}\right)$$

Accélération de Coriolis

C'est le terme restant dans l'expression de l'accélération absolue :

$$\vec{a_c} = 2\,\vec{\Omega}_{\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1} \wedge \vec{v}(M)_{/\mathcal{R}_2}$$

En résumé

LOI DE COMPOSITION DES ACCELERATIONS

L'accélération absolue d'un point M dans le référentiel de référence $\mathcal{R}_1$ est la somme de :

- l'accélération relative $\vec{a_r} = \vec{a}(M)_{/\mathcal{R}_2}$;
- l'accélération d'entraînement $\vec{a_e}(\text{M})$ qui correspond à l'accélération absolue du point coïncident ;
- l'accélération de Coriolis $\vec{a_c} = 2\,\vec{\Omega}_{\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1} \wedge \vec{v}(M)_{/\mathcal{R}_2}$.

$$\vec{a}(M)_{/\mathcal{R}_1} = \vec{a_r} + \vec{a_e} + \vec{a_c}$$

4.5. Mécanique non galiléenne

Nous avons maintenant tous les outils pour pouvoir appliquer les lois de la dynamique de Newton lorsqu'on ne se situe pas dans un référentiel galiléen. Soit $\mathcal{R}$ le référentiel (non galiléen, donc) dans lequel on étudie le mouvement et $\mathcal{R}_G$ un référentiel galiléen que l'on utilisera comme référence.

Pour écrire la relation fondamentale de la dynamique, nous devons d'abord nous placer dans $\mathcal{R}_G$. Pour simplifier, l'ensemble des forces appliquées au système sera noté $\vec{F}$:

$$m\vec{a}_{M/\mathcal{R}_G} = \vec{F}$$

Or nous avons vu précédemment que si on veut travailler dans $\mathcal{R}$ on peut exprimer l'accélération comme suit :

$$\vec{a}_{M/\mathcal{R}} = \vec{a}_{M/\mathcal{R}_G} + \vec{a_e} + \vec{a_c}$$

La relation fondamentale de la dynamique peut donc s'écrire comme suit :

$$m\vec{a}_{M/\mathcal{R}} = \vec{F} - m\vec{a_e} - m\vec{a_c}$$

Les termes $-m\vec{a_e}$ et $-m\vec{a_c}$ sont homogènes à des forces et ressentis comme tels (la force centrifuge, ressentie dans certains manèges correspond par exemple au terme $-m\vec{a_e}$). Nous les nommerons **forces d'inertie** et les noterons respectivement $\vec{F}_{ie}$ (force d'inertie d'entraînement) et $\vec{F}_{ic}$ (force d'inertie de Coriolis).

RELATION FONDAMENTALE DE LA DYNAMIQUE EN REFERENTIEL NON GALILEEN

Dans un référentiel $\mathcal{R}$ en mouvement accéléré par rapport à un référentiel galiléen, il faut introduire des forces d'inertie pour traduire correctement la relation fondamentale de la dynamique :

$$m\vec{a}_{M/\mathcal{R}} = \vec{F} + \vec{F}_{ie} + \vec{F}_{ic}$$

Avec :

$\vec{F}_{ie} = -m\vec{a_e}$: force d'inertie d'entraînement

$\vec{F}_{ic} = -m\vec{a_c}$: force d'inertie de Coriolis

Quelques manifestations de la force d'entraînement :

- Dans un véhicule accélérant fortement nous sommes collés à notre siège
- Dans un manège en rotation rapide, nous sommes entraînés vers l'extérieur par ce qu'on appelle la « force centrifuge »

Quelques manifestations de la force de Coriolis due à la rotation de la Terre :

- La déviation vers l'Est : On lâche un objet (une bille, par exemple) d'une hauteur h suffisamment grande pour que l'effet soit visible (de la Tour Eiffel par exemple). On observe alors que l'objet n'atterrit pas exactement à la verticale de là où il a été lâché : le décalage atteint quelques centimètres pour un lâcher du haut de la Tour Eiffel, par exemple.
- Usure des rails : la force de Coriolis est responsable de l'usure prématurée des rails d'un côté (côté Est en France et dans l'hémisphère nord).
- Mouvements atmosphériques et marins
- **Légende urbaine ! Le mythe du lavabo** : On raconte souvent (à tort) que le tourbillon qui se forme au-dessus du siphon tournerait dans le sens des aiguilles d'une montre dans l'hémisphère Sud, dans le sens contraire dans l'hémisphère Nord... L'explication viendrait de la force de Coriolis ! En réalité il n'en est rien. La rotation du globe terrestre est trop faible pour avoir le temps d'influer sur le sens de rotation de l'écoulement de l'eau dans un lavabo qui se vide. Le sens de rotation de l'eau est dû à la géométrie du lavabo et aux microcourants d'eau créés lors de son remplissage.

4.6. Cas particulier n°1 : translation rectiligne uniforme

Le référentiel $\mathcal{R}_2$ est en translation rectiligne à une vitesse $\vec{v}_{\mathcal{R}_1/\mathcal{R}_2}$ par rapport à $\mathcal{R}_1$.

A VOUS DE JOUER

$\vec{\Omega}_{\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1} =$

$\vec{v_e} =$

Supposons qu'un point matériel M ait une vitesse connue dans le référentiel $\mathcal{R}_2$, noté $\vec{v}_{\mathcal{R}_2}$

$\vec{v}_{\mathcal{R}_1} =$

$\vec{a}_{\mathcal{R}_1} =$

Supposons le référentiel $\mathcal{R}_1$ galiléen. Quelles sont les valeurs des forces d'inertie dans le référentiel $\mathcal{R}_2$? Ce résultat est-il surprenant ?

4.7. Cas particulier n°2 : rotation autour d'un axe fixe

Notons (Oz) l'axe fixe dans le référentiel $\mathcal{R}_1$ autour duquel tourne le référentiel $\mathcal{R}_2$ à la vitesse angulaire ω.

$$\overrightarrow{\Omega}_{\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1} = \omega\overrightarrow{u_z} = \dot{\theta}\overrightarrow{u_z}$$

A VOUS DE JOUER

Faire un schéma. Représenter le point M ainsi que la trajectoire du point coïncident. On notera ρ la distance à l'instant t entre le point M et sa projection H sur l'axe de rotation.

Montrer que la vitesse d'entraînement s'écrit : $\overrightarrow{v_e} = \dot{\theta}\,\overrightarrow{u_z} \wedge \overrightarrow{HM} = \rho\dot{\theta}\overrightarrow{u_{y2}}$ (on précisera sur le schéma le vecteur unitaire $\overrightarrow{u_{y2}}$).

Déterminer l'expression de l'accélération d'entraînement :

$\overrightarrow{a_e} =$

Que peut-on dire de cette accélération si la vitesse de rotation est uniforme ? Expliquer l'origine de la force centrifuge.

Déterminer l'expression de l'accélération de Coriolis :

$\overrightarrow{a_c} =$