TD 6

Dynamique du point

Exercice 1 : Applications directes du cours

1 Ressorts en « série »

On considère deux ressorts de constantes de raideur k_1 et k_2, et de longueurs au repos $l_{1,0}$ et $l_{2,0}$. Les deux ressorts sont attachés par une extrémité que l'on appelera A. Montrer que ces deux ressorts sont équivalents à un unique ressort dont on quantifiera les grandeurs caractéristiques.

2 Ressorts en « parallèle »

On considère deux ressorts de constantes de raideur k_1 et k_2, et de longueurs au repos $l_{1,0}$ et $l_{2,0}$. Les deux ressorts sont attachés à leurs deux extrémités, ils sont donc parallèles l'un à l'autre. Montrer que ces deux ressorts sont équivalents à un unique ressort dont on quantifiera les grandeurs caractéristiques.

3 Masse et ressort sur un plan incliné

On considère une masse située au bout d'un ressort de raideur k et de longueur à vide l_0. Le ressort est attaché en haut d'une pente faisant un angle α avec l'horizontale. On pose $OM = x$. Déterminer l'expression x_e de x à l'équilibre. Déterminer $x(t)$ lorsque la masse est déplacée de sa position initiale à une valeur x_0 et lachée (sans vitesse initiale).

4 Masse sur un plan incliné

On considère une masse m posée sur un plan incliné d'angle α avec l'horizontale. Cet angle est réglable, et on observe, en partant de $\alpha = 0$ et en l'augmentant, qu'à une variable α_0, la masse commence à glisser. Expliquer le phénomène et déterminer le coefficient intéressant.

Exercice 2 : Tir parabolique

Le tir parabolique est un cas particulier de chute libre, où la vitesse initiale $\vec{v}_0$ n'est pas nulle. On considère un canon, tirant, à l'instant $t = 0$ un boulet M de masse m, avec une vitesse initiale v_0. Le tube du canon fait un angle α avec le sol.

1. Déterminer les équations horaires du mouvement.
2. En déduire la trajectoire du boulet.
3. Quelle est la portée du tir (distance maximale parcourue) ? Montrer qu'il existe 2 angles α donnant la même portée. Quelle est la hauteur maximale (appelée la flèche) atteinte par le boulet dans les deux cas ? Pour quel angle α la portée est-elle maximale ?
4. La parabole de sûreté est la zone en dehors de laquelle le boulet ne peut aller, quel que soit l'angle α. Déterminer l'équation de la parabole de sûreté.

Suppose maintenant que le boulet de canon est soumis aux frottements de l'air, de type frottement fluide $\vec{F} = -\lambda\vec{v}$, où λ est une constante positive et $\vec{v}$ la vitesse du boulet.

1. Déterminer l'expression du vecteur vitesse du boulet au cours du temps.
2. Représenter l'évolution des composantes horizontale et verticale de $\vec{v}$ en fonction du temps.
3. Décrire l'allure de la trajectoire du boulet de canon.
4. Préciser la portée du tir en fonction des données du problème. Comparer au résultat sans les frottements.
5. Déterminer la hauteur maximale atteinte par le boulet au cours du tir.

Exercice 3 : Pendule

Un pendule simple est modélisé par une masse suspendue à un fil inextensible de longueur l. A l'instant initial, il est lâché sans vitesse initiale depuis la position θ_0. On suppose que les forces de frottement sont négligeables.

1. Faire un schéma et ajouter les vecteurs de la base polaire $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$.
2. Faire le bilan des forces qui s'appliquent sur la masse. Les dessiner sur le schéma et donner leurs composantes dans la base polaire.
3. Montrer que l'équation du mouvement du pendule s'exprime comme :

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\sin\theta = 0$$

4. Que devient cette équation lorsque $\theta \ll 0$? Comment s'appelle cette équation ?
5. Définir la pulsation propre du pendule et vérifier son homogénéité.
6. La solution d'une telle équation s'exprime comme :

$$\theta(t) = A\cos\omega_0 t + B\sin\omega_0 t$$

avec ω_0 la pulsation propre, A et B des constantes à déterminer. Déterminer A et B dans le cadre du problème.

Exercice 4 : Satellite en orbite

On considère un satellite, modélisé par un point matériel M de masse m, en rotation autour de la Terre de masse M_T sur une trajectoire circulaire de rayon R.

1. Faire un schéma de la situation.
2. Quelle est la base la plus adaptée à l'étude du mouvement du satellite ?
3. Faire un bilan des forces et les représenter sur le schéma.
4. Déterminer les équations du mouvement du satellite.
5. En déduire que la vitesse angulaire du satellite est constante et donner son expression en fonction des données du problème.
6. En déduire l'expression du vecteur position, de la vitesse et de l'accélération du satellite.
7. Quelle est l'orientation du vecteur accélération ?

Exercice 5 : Chute libre depuis un avion

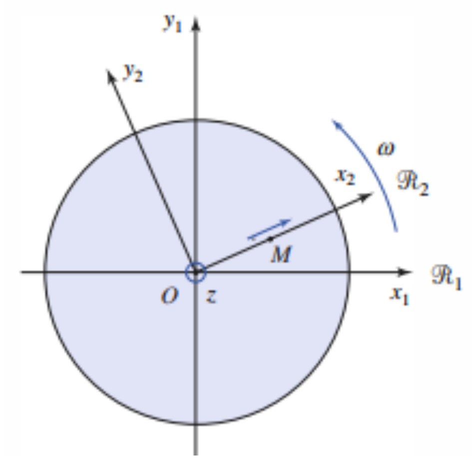
Un avion humanitaire vole à une altitude $h = 5000\ \mathrm{m}$ à la vitesse $v = 750\ \mathrm{km}\cdot\mathrm{h}^{-1}$. Il largue un colis de nourriture et de médicaments, de masse m, lorsqu'il passe à la verticale du point A. On considèrera le colis comme un point matériel M.

1. Déterminer l'équation du mouvement du point M.
2. Quel est le temps mis par le point M pour toucher le sol ?
3. Quelle est la distance parcourue par l'avion pendant ce temps ?
4. À quelle distance du point A se trouve le colis lorsqu'il touche le sol ?
5. Que se passe-t-il qualitativement si l'avion a une trajectoire inclinée vers le bas d'un angle $\beta = 10°$ par rapport à la verticale ?
6. À quelle hauteur devrait alors se trouver l'avion pour que le colis tombe à moins de 100 m du point A ?

Exercice 6 : Mouvement radial sur un plateau tournant

Soit un plateau horizontal (manège par exemple) tournant avec une vitesse angulaire ω autour d'un axe vertical fixe (Oz).

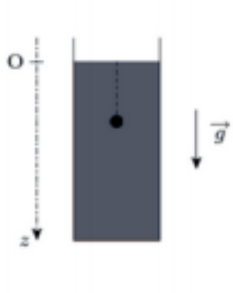
$\mathcal{R}_1$ est le référentiel terrestre et $\mathcal{R}_2$ le référentiel lié au plateau.



Un mobile de position M décrit à vitesse constante $\vec{v}$ l'axe (Ox_2) lié à $\mathcal{R}_2$.

Exprimer $\vec{v}(M)_{/\mathcal{R}_1}$ et $\vec{a}(M)_{/\mathcal{R}_1}$ dans la base $(\vec{e}_{x2}, \vec{e}_{y2})$.

Exercice 7 : Mesure de la viscosité d'un fluide



A $t = 0$ une bille d'acier de masse volumique $\rho = 7800 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ et de rayon $r = 5 \text{ mm}$ est déposée sans vitesse initiale à la surface d'un tube rempli de glycérine. La glycérine est un fluide visqueux de masse volumique $\rho_0 = 1260 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$. On définit sa viscosité η par l'expression de la force de frottement $\vec{f}$ qu'elle exerce sur la bille quand celle-ci est en mouvement à la vitesse $\vec{v}$:

$$\vec{f} = -6\pi\eta r\vec{v}$$

La position de la bille est repérée par la coordonnée $z(t)$ mesurée à l'instant t sur l'axe Oz descendant fixe dans le référentiel d'étude, supposé galiléen. Le champ de pesanteur supposé constant a pour module $g = 9{,}8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.

1. Montrer que le vecteur $\vec{v}$ vérifie l'équation différentielle suivante :

$$\frac{d\vec{v}}{dt} + \alpha\vec{v} = \beta\vec{g}$$

   Où on déterminera α et β en fonction des données du problème.

2. Montrer que la bille va atteindre une vitesse limite d'expression suivante :

$$v_{lim} = \frac{2(\rho - \rho_0)gr^2}{9\eta}$$

3. On mesure pour différentes valeurs de r la vitesse limite de la bille. Les mesures sont présentées dans le tableau ci-dessous :

r (mm)	1,50	1,60	1,75	2,00	2,25
v_{lim} (cm.s^{-1})	5,2	5,9	7,1	9,1	11,5

   En déduire la valeur de la viscosité η de la glycérine. Conclure.

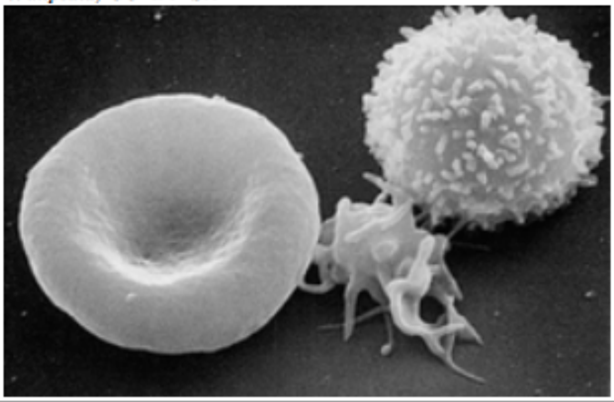
4. Donner l'expression de la constante de temps τ avec laquelle le mouvement permanent s'établit. Faire l'application numérique pour $r = 1{,}50 \text{ mm}$. Commenter.

Exercice 8 : Résolution de problème – sédimentation du plasma sanguin

La vitesse de sédimentation fait partie des examens de routine effectués au cours d'un bilan sanguin permettant de détecter des phénomènes inflammatoires ou infectieux. La vitesse de sédimentation à la première heure correspond à la hauteur (en mm) de globules rouges ayant sédimenté en une heure au fond d'un tube à essai, le sang ayant été rendu incoagulable.

Déterminer la fourchette dans laquelle doit se trouver la vitesse de sédimentation à la première heure d'un sang sain.

Document 1 – Érythrocyte, thrombocyte, leucocyte
Wikipedia, CC–BY–SA



Document 2 – Propriétés biologiques

Cellules	Dimension	Quantité ($10^3/\text{mm}^3$)
Erythrocyte (globule rouge)	$6.8\mu m$ à $7.3\mu m$	4600 à 6000
Thrombocyte (plaquette)	$2\mu m$ à $4\mu m$	150 à 450
Leucocyte (globule blanc)	$4\mu m$ à $12\mu m$	4 à 10

Le globule rouge est modélisé par un cylindre de hauteur égale au $1/5^{\text{ème}}$ de son diamètre.

Document 3 – Force de frottement.

Un objet sphérique en mouvement à une vitesse de norme v subit une force de frottement fluide, deux modèles existent

- le modèle de Stokes $\vec{f} = -6\pi\eta R\vec{v}$;
- le modèle quadratique $\vec{f} = -\frac{1}{2}\rho\pi R^2 C_x v\vec{v}$;

avec R le rayon de l'objet, ρ la masse volumique du fluide, η la viscosité du fluide, C_x le coefficient de trainée ($C_x = 0.5$ pour une sphère).

Document 4 – Nombre de Reynolds R_e

Le modèle de frottement adapté à une situation est déterminé à l'aide d'un paramètre sans dimension, le nombre de Reynolds

$$R_e = \rho L v/\eta \,;$$

avec ρ la masse volumique du fluide, L dimension caractéristique de l'objet, v vitesse de l'objet et η viscosité du fluide.
On admettra que le modèle de Stokes est acceptable si $R_e \leq 10$ et que le modèle quadratique est acceptable si $R_e \geq 10^3$.

Document 5 – Données numériques

- hauteur d'un tube à essais 70 mm
- diamètre d'un tube à essais 12 mm
- accélération de pesanteur $9.81\,\text{m}\,\text{s}^{-2}$
- masse volumique du plasma sanguin $1.0 \times 10^3\,\text{kg}\,\text{m}^{-3}$
- masse volumique des globules rouges $1.3 \times 10^3\,\text{kg}\,\text{m}^{-3}$
- viscosité dynamique du plasma sanguin 1.6×10^{-3} uSI