TD 5

Cinématique du point

Exercice 1 : Applications directes du cours

1. Durée et distance

Un véhicule se déplace en ligne droite, avec une accélération constante a = 6 m·s^{-2}. Déterminer le temps mis pour passer de 0 à 100 km·h^{-1}, ainsi que la distance parcourue.

2. Virage

Un avion se déplace à la vitesse constante v en virage circulaire horizontal de centre O et de rayon R = 600 m. Déterminer la vitesse v de l'avion afin que son accélération soit a = 6 G (attention, a n'est pas une masse...).

3. Mouvement d'une moto

Une moto, assimilée à un point matériel M, a une accélération constante $\vec{a}_0 = a_0\vec{u}_x$ dans le référentiel terrestre ($\mathcal{R}$). A t=0, la moto a une vitesse $\vec{v}_0$ et est située en O. On note $\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ l'angle entre le vecteur $\vec{v}_0$ et l'axe (Ox).

1. Obtenir l'expression des vecteurs position, vitesse et accélération de la moto en fonction des données du problème.
2. En déduire l'équation de la trajectoire.
3. Représenter la trajectoire de la moto dans le plan adapté.

4. Mouvement d'un ballon sonde en présence de vent latéral

Un ballon-sonde a une vitesse d'ascension verticale v_0 indépendante son altitude z. Le vent lui communique une vitesse horizontale $v_x = \frac{z}{\tau}$ proportionnelle à son altitude. On note Oz la verticale ascendante.

1. Déterminer les lois horaires du mouvement $x(t)$ et $z(t)$ ainsi que l'équation de la trajectoire $x(z)$.
2. Calculer le vecteur accélération.

5. Mouvement parabolique uniforme

Un point matériel décrit un mouvement parabolique d'équation $y = \alpha \cdot x^2$. La norme v de sa vitesse est constante.

1. Déterminer la composante v_y de la vitesse, en fonction de x et de v_x.
2. En déduire a_y en fonction de x, v_x et a_x ; v_x et a_x en fonction de x et de v.*
3. Déterminer l'accélération au point O (0,0).

Exercice 2 : Manège

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé (Oxy), les coordonnées du cheval en bois d'un manège, assimilé à un point matériel M, sont définies en fonction du temps par les équations dites paramétriques suivantes :

$$\begin{cases} x(t) = r_0 \cos \omega t \\ y(t) = r_0 \sin \omega t \end{cases}$$

r_0 et ω étant des constantes positives.

1. Quelles sont les unités des constantes r_0 et ω ?
2. Former l'équation de la trajectoire et montrer que celle-ci est un cercle dont on précisera les coordonnées du centre et du rayon.
3. Pour un instant t quelconque, déterminer les composantes du vecteur vitesse $\vec{v}(t)$ dans la base $(\vec{u}_x, \vec{u}_y)$ et calculer sa norme $\|\vec{v}\|$.
4. En déduire les composantes du vecteur accélération $\vec{a}(t)$, calculer sa norme et préciser l'orientation de ce vecteur.
5. Si le cercle était centré sur (x_0, y_0) quelles seraient les équations paramétrées de x(t) et y(t) ?

Exercice 3 : Manège en coordonnées polaires

On reprend l'exercice précédent (manège) et on rappelle les coordonnées du cheval en bois dans le repère orthonormé (Oxy) :

$$\begin{cases} x(t) = r_0 \cos \omega t \\ y(t) = r_0 \sin \omega t \end{cases}$$

r_0 et ω étant des constantes positives.

1. Sur un schéma, représenter les vecteurs de la base polaire pour une position quelconque du point matériel. Y indiquer les coordonnées associées ainsi que le vecteur position $\overrightarrow{OM}$.
2. Définir le vecteur position $\overrightarrow{OM}(t)$ dans la base polaire puis l'exprimer en fonction des données de l'exercice.
3. Pour un instant t quelconque, déterminer l'expression du vecteur vitesse $\vec{v}$ dans la base polaire.
4. En déduire sa norme $\|\vec{v}\|$ et vérifier l'homogénéité du résultat obtenu.
5. Montrer qu'en coordonnées cartésiennes le vecteur vitesse s'écrit :

$$\vec{v}(t) = -r_0\omega \sin \omega t \cdot \vec{u}_x + r_0\omega \cos \omega t \cdot \vec{u}_y$$

   Calculer sa norme et en déduire le lien entre ω et la vitesse angulaire $\dot{\theta}$.

6. En déduire la nature du mouvement du point matériel.
7. Déterminer les composantes du vecteur accélération $\vec{a}$ dans la base polaire, calculer sa norme et préciser l'orientation de ce vecteur.

Exercice 4 : Une histoire de dépassement

Une automobile attend à un feu rouge. Quand le feu passe au vert, elle accélère uniformément en ligne droite pendant t_1 = 6 s avec une accélération a_1 = 2m.s^{-2}, après quoi elle possède un mouvement rectiligne et uniforme de vitesse v_1.

Au moment où la voiture démarre au feu vert, un camion se déplaçant dans la même direction avec une vitesse constante v_2 = 10 m.s^{-1} la dépasse.

On note (Ox) l'axe selon lequel se déplacent les véhicules. On choisit comme origine des dates le moment où le feu passe au vert et comme origine d'espace O la position du feu tricolore.

1. On se place à un instant $t \in [0; t_1]$:
   (a) Quelle est l'expression de la position $x_a(t)$ et de la vitesse $v_a(t)$ de l'automobiliste ?
   (b) Quelle est l'expression de la position $x_c(t)$ et de la vitesse $v_c(t)$ du camion ?
   (c) Déterminer numériquement la position des deux véhicules en $t = t_1$.

2. On se place à présent à un instant ultérieur à t_1. On pourra introduire un temps "décalé" $t' = t - t_1$ afin de simplifier les calculs.

(a) Quelle est l'expression de la position $x_a(t)$ et de la vitesse $v_a(t)$ de l'automobiliste ?
(b) Quelle est l'expression de la position $x_c(t)$ et de la vitesse $v_c(t)$ du camion ?
(c) A quel instant t_d la voiture dépasse-t-elle le camion ?
(d) En déduire la distance d entre le feu tricolore et le lieu de dépassement.

Exercice 5 : Mouvement cycloïdal

Un cercle de rayon R roule sans glisser sur l'horizontale Ox. Son centre est animé d'une vitesse V_c constante.

1. Donner les expressions en fonction du temps des coordonnées d'un point M du cercle, l'instant initial étant celui où M est au contact de Ox pour la première fois.
2. Déterminer les vecteurs vitesse et accélération de M.
3. Représenter l'allure de la trajectoire pour $0 \leq x \leq 2\pi R$