Dynamique des fluides

L'étude cinématique d'un fluide en écoulement fournit les outils nécessaires à la description du mouvement des particules de fluide, indépendamment des actions subies. L'étude dynamique permet de relier son mouvement aux contraintes s'exerçant au sein du fluide.

1. Fluide parfait. Équation d'Euler

1.1. Fluide parfait. Écoulement parfait

Un fluide parfait est un fluide de viscosité nulle.

Un écoulement est dit parfait lorsque la viscosité et les autres phénomènes diffusifs (diffusion thermique, diffusion de particules...) sont négligeables.

1.2. Équation d'Euler

Nous nous intéresserons à partir de maintenant à la physique des écoulements parfaits, où nous pourrons négliger tous les phénomènes de diffusion. Les actions de surface sont donc restreintes aux forces de pression dont on notera $\vec{f}_{pression}$ l'équivalent volumique.

Considérons une particule de fluide que nous suivons dans son mouvement. Sa masse dm est donc constante. En supposant le référentiel d'étude galiléen nous pouvons lui appliquer la relation fondamentale de la dynamique :

$$dm\vec{a} = \sum_{i=1}^{n} d\vec{F}_i(M) = \sum_{i=1}^{n} \vec{f}_i(M)\, d\tau$$

où $\vec{f}_i(M)$ correspondent aux forces volumiques (ou leur équivalent dans le cas de la pression).

En utilisant l'expression $dm = \rho d\tau$ et en écrivant l'expression de l'accélération particulaire on obtient :

$$\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} d\tau = \sum_{i=1}^{n} \vec{f}_i(M) d\tau$$

$$\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} = \sum_{i=1}^{n} \vec{f}_i(M) = \vec{f}_{pression} + \vec{f}_{pesanteur} + \vec{f}$$

avec :

- $\vec{f}_{pression} = -\overrightarrow{grad}\, P$: équivalent volumique des forces de pression ;
- $\vec{f}_{pesanteur} = \rho\vec{g}$: force volumique associée au poids ;
- $\vec{f}$: densité volumique des forces autres que celle du champ de pression et de la pesanteur (il peut s'agir des forces d'inertie ou des forces électromagnétiques.

Pour un fluide en écoulement parfait de masse volumique ρ :

$$\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} = \rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \rho(\vec{v}.\overrightarrow{grad})\vec{v} = -\overrightarrow{grad}\, P + \rho\vec{g} + \vec{f}$$

ou encore :

$$\rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \rho\overrightarrow{grad}\left(\frac{v^2}{2}\right) + \rho\left(\overrightarrow{rot}\,\vec{v}\right) \wedge \vec{v} = -\overrightarrow{grad}\, P + \rho\vec{g} + \vec{f}$$

2. Relations de Bernoulli

Par leur simplicité et leurs nombreuses applications pratiques, les relations de Bernoulli occupent une place très importante en mécanique des fluides. Nous avons vu qu'il s'agit du théorème de l'énergie cinétique appliqué aux fluides, autrement dit l'intégration de l'équation d'Euler dans des cas simples : nous en distinguerons trois. Nous obtiendrons des relations qui équilibrent les termes de pression, de vitesse et d'énergie potentielle le long d'un flux de fluide.

Les relations de Bernoulli offrent un cadre conceptuel pour analyser comprendre une multitude de phénomènes, tels que la dynamique des avions, des tuyaux, des rivières, et même des systèmes sanguins. Elles représentent un outil essentiel pour les ingénieurs, météorologues et chercheurs en mécanique des fluides, guidant leurs analyses et prévisions.

Dans cette partie nous n'étudierons que les fluides soumis aux forces de pression et au poids. Le terme $\vec{f}$, correspondant aux autres forces, est donc supposé nul.

2.1. Cas d'un écoulement parfait, stationnaire et homogène

$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = 0$ il est possible d'écrire l'équation d'Euler sous la forme suivante :

$$\overrightarrow{grad}\left(\frac{v^2}{2}\right) + \rho\left(\overrightarrow{rot}\,\vec{v}\right) \wedge \vec{v} = -\overrightarrow{grad}\, P + \rho\vec{g}$$

On pose (Oz) l'axe vertical ascendant. La masse volumique étant homogène, on a :

$$\rho\vec{g} = -\rho\overrightarrow{grad}(gz) = -\overrightarrow{grad}(\rho gz)$$

d'où

$$\rho\overrightarrow{grad}\left(\frac{v^2}{2}\right) + \overrightarrow{grad}\, P + \overrightarrow{grad}(\rho gz) + \rho\left(\overrightarrow{rot}\,\vec{v}\right) \wedge \vec{v} = \vec{0}$$

soit encore

$$\overrightarrow{grad}\left(P + \rho gz + \frac{1}{2}\rho v^2\right) + \rho\left(\overrightarrow{rot}\,\vec{v}\right) \wedge \vec{v} = \vec{0}$$

Déplaçons-nous maintenant sur une ligne de champ. À chaque instant, notre déplacement infinitésimal est $\overrightarrow{dl}$ et donc colinéaire à $\vec{v}$. Or, par définition $\rho\left(\overrightarrow{rot}\,\vec{v}\right) \wedge \vec{v}$ est orthogonal à $\vec{v}$ et $\left(\rho\left(\overrightarrow{rot}\,\vec{v}\right) \wedge \vec{v}\right).\vec{v} = 0$.

On peut donc écrire :

$$\overrightarrow{grad}\left(P+\rho gz+\frac{1}{2}\rho v^2\right).\overrightarrow{dl}=0$$

qui par définition donne

$$d\left(P+\rho gz+\frac{1}{2}\rho v^2\right)=0$$

$$P+\rho gz+\frac{1}{2}\rho v^2=constante \quad \text{(ligne de courant)}$$

Ceci constitue une première relation de Bernoulli, qui n'est autre que le théorème de l'énergie cinétique appliquée aux fluides.

2.2. Cas d'un écoulement parfait, stationnaire, homogène et irrotationnel

Ce cas est plus simple que le précédent car $\overrightarrow{rot}\,\vec{v}=\vec{0}$.

On a donc :

$$\rho\overrightarrow{grad}\left(\frac{v^2}{2}\right)+\overrightarrow{grad}\,P+\overrightarrow{grad}(\rho gz)=\vec{0}$$

ainsi, lorsqu'on circule d'un point à l'autre du fluide (pas forcément sur une ligne de courant), on a :

$$\overrightarrow{grad}\left(P+\rho gz+\frac{1}{2}\rho v^2\right).\overrightarrow{dl}=0$$

soit :

$$d\left(P+\rho gz+\frac{1}{2}\rho v^2\right)=0$$

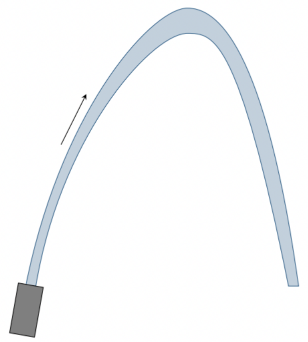
On obtient une relation valable sur l'ensemble du fluide :

$$P+\rho gz+\frac{1}{2}\rho v^2=constante$$

3. Quelques applications des relations de Bernoulli

3.1. Pression dans un jet d'eau à l'air libre

On admet qu'un jet d'eau à l'air libre peut être modélisé par un écoulement parfait, stationnaire, incompressible et irrotationnel.



Dans une section droite du jet :

$v = cte$ (écoulement parfait) et $z \simeq cte$ (jet de petite taille)

Conséquence :

$P \simeq cte$ d'après Bernoulli et par continuité de la pression à l'interface air-eau on en conclut qu'elle est égale à la pression atmosphérique.

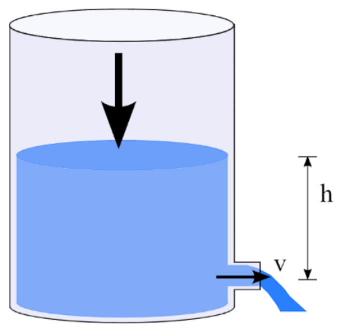
Ce raisonnement étant valable dans n'importe quelle section du jet d'eau, on conclut que la pression dans un jet d'eau à l'air libre est partout égale à la pression atmosphérique.

Remarque :

La vitesse de l'écoulement est uniforme sur une section, mais pas dans l'ensemble du jet car les particules fluides accélèrent sous l'effet de leur poids et sont freinées par les frottements de l'air. D'après la conservation du débit, cela signifie que le diamètre du jet varie également.

3.2. Vidange d'un réservoir : formule de Torricelli

Un réservoir est muni d'un orifice par lequel un fluide incompressible peut s'écouler : nous cherchons à déterminer la vitesse v d'éjection du fluide au niveau de cet orifice.



On note h la hauteur du liquide dans le réservoir et S la surface libre (section du réservoir). On note s la section de l'orifice. On suppose également que l'orifice a une section négligeable devant la surface libre : $s \ll S$.

L'écoulement du fluide est parfait et incompressible. La pression de l'air extérieur est notée P_0, supposée uniforme.

1. L'écoulement est-il stationnaire ? Pourquoi ?

L'écoulement n'est pas stationnaire, mais il peut être considéré comme quasi-stationnaire.

Pourquoi ?

Le fluide s'échappe par l'orifice, donc la hauteur d'eau $h(t)$ dans le réservoir **diminue au cours du temps**.

Or la vitesse d'éjection v dépend de h. Comme h varie avec le temps, le champ de vitesse varie aussi, donc **l'écoulement est non stationnaire** au sens strict.

2. Quelle loi de conservation peut-on écrire ? En déduire que le régime est quasi-stationnaire.

Conservation du débit volumique.

Comme $s \ll S$, la vitesse de la surface libre est très faible par rapport à la vitesse à l'orifice.

La hauteur h varie **lentement** comparée au temps de passage du fluide.

On peut donc, à chaque instant, **assimiler l'écoulement à un régime stationnaire**, avec une valeur instantanée de h.

3. En appliquant judicieusement le théorème de Bernoulli (préciser les hypothèses) montrer que la vitesse du fluide en sortie du récipient vaut :

$$v = \sqrt{2gh}$$

La pression dans un jet d'eau à l'air libre est partout égale à la pression atmosphérique P_0.

$$P_0 + \rho g h + 0 = P_0 + 0 + \frac{1}{2}\rho v^2$$

$$v = \sqrt{2gh}$$

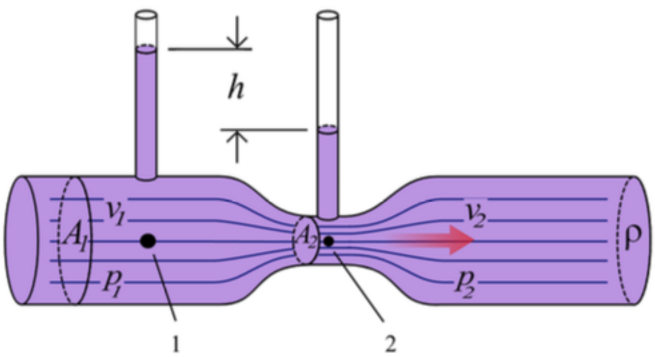
3.3. Effet Venturi

L'effet Venturi est un phénomène qui trouve des applications dans de nombreux domaines, allant de l'ingénierie aéronautique à la conception des systèmes de distribution d'eau. Ce phénomène repose sur le principe fondamental de conservation de la masse et illustre de manière saisissante la relation entre la vitesse d'écoulement d'un fluide et la pression qui en résulte : en effet, la relation de Bernoulli montre que quand la vitesse du fluide augmente, la pression diminue. Cette dépression locale crée un effet d'aspiration.

L'effet Venturi est obtenu en modifiant la section d'une canalisation, et en exploitant la conservation du débit pour obtenir une augmentation de vitesse.

Une des applications de cet effet est le tube de Venturi, utilisé pour réaliser des mesures de débit.

Le débitmètre à tube de Venturi est un dispositif très utilisé pour les mesures de débits de liquides et de gaz dans de nombreux processus industriels (canalisations, pipelines, tuyauteries, systèmes de chauffage ou de refroidissement, etc.). Le tube de Venturi présente deux parties de portions cylindriques de section constante de part et d'autre d'un étranglement. On note (Ox) l'axe du tube. On note D_1 et D_2 les diamètres des deux portions correspondantes.



Un fluide supposé incompressible s'écoule dans le tube, et on se place en régime stationnaire.

Deux tubes verticaux, appelés tubes piézométriques, ou prises de pression, sortent du tube de Venturi au niveau des points notés A_1 et A_2 sur le schéma. Dans ces tubes, le fluide est statique.

On note P_0 la pression du gaz à la surface libre du fluide dans les tubes piézométriques.

La différence de hauteur d'eau présente dans les tubes piézométriques permet de remonter à la différence de pression du fluide entre les points A_1 et A_2, et par extension au débit du fluide en A_1.

1. Peut-on supposer l'écoulement irrotationnel en tout point du fluide ? Conséquence ?

Dans un fluide **parfait** (viscosité négligée) et en régime stationnaire, **l'écoulement peut être supposé irrotationnel** en dehors d'éventuelles zones très locales près des parois.

On peut appliquer **la relation de Bernoulli entre deux points quelconques de l'écoulement**, en particulier entre A_1et A_2 :

$$P + \rho g z + \frac{1}{2}\rho v^2 = constante$$

2. Exprimer v_2 en fonction de v_1 et des diamètres D_1 et D_2.

$$v_1 \times \pi\left(\frac{D_1}{2}\right)^2 = v_2 \times \pi\left(\frac{D_2}{2}\right)^2$$

$$v_2 = \left(\frac{D_1}{D_2}\right)^2 \times v_1$$

3. Déterminer la différence de pression $P_1 - P_2$ en fonction des vitesses, puis en fonction de v_1 uniquement. Commenter le signe.

$$P_1 + 0 + \frac{1}{2}\rho {v_1}^2 = P_2 + 0 + \frac{1}{2}\rho {v_2}^2$$

$$P_1 - P_2 = \frac{1}{2}\rho {v_2}^2 - \frac{1}{2}\rho {v_1}^2$$

$$P_1 - P_2 = \frac{1}{2}\rho {v_1}^2\left(\left(\frac{D_1}{D_2}\right)^4 - 1\right)$$

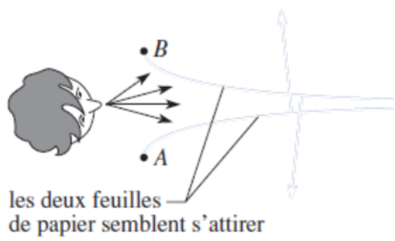
Comme $D_2 < D_1$ alors $v_2 > v_1$ donc $P_1 - P_2 > 0$.

La pression diminue lorsque la vitesse augmente.

Nous verrons un autre exemple de débitmètre, qui exploite l'effet Venturi : le tube de Pitot, ou sonde de Pitot, qui permet notamment de mesurer la vitesse des fluides en aéronautique (vitesse d'un avion), dans diverses études aérodynamiques (automobile par exemple) ou encore dans le domaine de la météorologie.

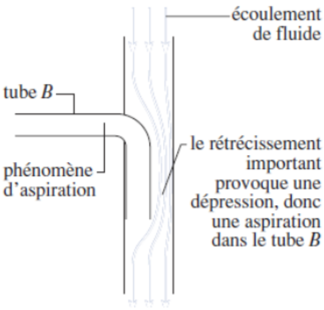
L'effet Venturi se manifeste à de nombreuses occasions dans la vie quotidienne :

En soufflant entre deux feuilles maintenues fixes aux points A et B, les deux feuilles semblent s'attirer.



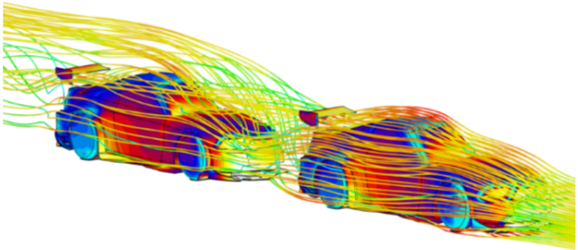
Trompe à eau

Utilisée pour créer du vide, notamment pour la filtration Büchner : un étranglement d'une conduite d'eau est relié à un récipient dans lequel on souhaite faire le vide.



Effet d'aspiration

En course cycliste ou automobile, cet effet se produit lorsqu'un véhicule se déplace à grande vitesse, créant une zone de basse pression derrière lui. Cette zone de basse pression peut aspirer le véhicule suivant, réduisant ainsi la résistance à l'air et permettant au véhicule suiveur de bénéficier d'une traînée réduite. Cette technique est souvent appelée "aspiration" ou "drafting" en anglais.

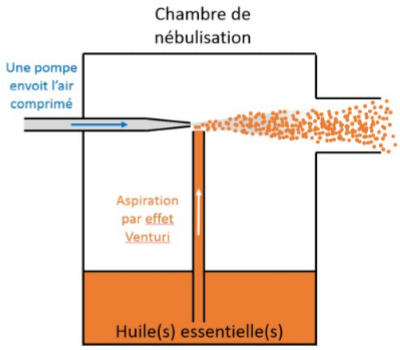


Brumisateurs

Les brumisateurs d'huiles essentielles utilisent la nébulisation par effet Venturi : l'huile essentielle est aspirée dans le flux d'air circulant dans le brumisateur.

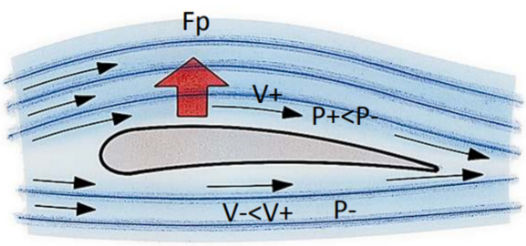
Lorsque l'huile essentielle est aspirée, elle est brisée en fines gouttelettes (nébulisation).

Les particules fines d'huile essentielle, maintenant sous forme de brouillard, sont libérées dans l'air ambiant, ce qui permet une diffusion homogène et légère dans l'environnement.



3.4. Portance : pourquoi un avion vole ?

La portance des avions (la force ascendante qui leur permet de voler) est un phénomène complexe qui résulte de différents facteurs, impliquant la 3ème loi de Newton et la viscosité de l'air. On peut tout de même en rendre compte de manière qualitative :



Le profil de l'aile d'avion dessinée ici est tel que la vitesse de l'air est supérieure au-dessus de l'aile (l'extrados) qu'en dessous (l'intrados). Selon le théorème de Bernoulli, la pression sera plus forte là où la vitesse est la plus faible, soit en dessous. Il en résulte une force globale de pression vers le haut, appelée portance et qui explique pourquoi un avion peut voler.

3.5. Effet Magnus : le lift

L’effet Magnus est un effet observé lorsque des objets en rotation (par exemple un ballon de football, une balle de tennis) interagissent avec un fluide, comme l'air. La rotation induit des modifications de pression autour de l’objet et incurvent sa trajectoire : ballon brossé au football lors du tir d’un coup francs, trajectoire des balles liftées, coupées, slicées, au tennis. Cet effet est souvent étudié dans le contexte du mouvement des projectiles.