TD Dynamique des fluides

Écoulements parfaits

Exercice 1 : Débitmètre de Venturi

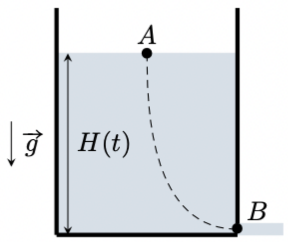
Un débitmètre de Venturi est un dispositif, représenté figure 1, qui permet de mesurer le débit d'un écoulement permanent incompressible dans une conduite. Il s'agit d'imposer un rétrécissement de section et de mesurer grâce à un manomètre différentiel la différence de pression entre deux prises de pression placées en amont et au cœur du resserrement de section.

Figure 1 – **Débitmètre de Venturi.**

1 - Comment évolue la vitesse débitante entre les deux sections S_1 et S_2 où sont placées les prises de pression ? En déduire le signe de $\Delta p = p_1 - p_2$.

2 - Exprimer le débit volumique dans la conduite en fonction notamment de Δp et du rapport des sections.

Exercice 2 : Formule de Torricelli



Soit un réservoir cylindrique de section S, initialement rempli d'eau avec une hauteur H_0. On perce au point B, au fond de ce réservoir, un orifice de section $s \ll S$, par lequel il se vide. On suppose étudier la vidange dans une approximation de régime quasi-stationnaire.

1 - Montrer que $v_B \gg v_A$.

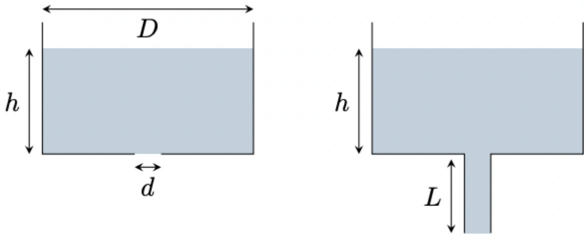
2 - En appliquant la relation de Bernoulli, montrer que le débit volumique sortant du cylindre s'exprime par $D_V = s\sqrt{2gH(t)}$. Cette relation est appelée « relation de Torricelli », publiée[1] par Evangelista Torricelli en 1644 en conclusion ses travaux pour les fontainiers de Florence. Torricelli est également connu pour l'invention du baromètre.

3 - Montrer que la hauteur d'eau vérifie l'équation différentielle

$$\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t} = -\alpha\sqrt{2gH} \qquad \text{avec} \qquad \alpha = \frac{s}{S}\,.$$

4 - En déduire la durée Δt nécessaire pour vider intégralement le réservoir.

Exercice 3 : Vidange d'un réservoir



Cet exercice étudie la vidange d'un réservoir de diamètre D par un petit orifice de diamètre d percé au fond, auquel on ajoute éventuellement un tuyau de longueur L de même diamètre. La hauteur d'eau dans le réservoir est notée h.

1 - Déterminer la vitesse de sortie v_s dans les deux cas.

2 - Exprimer le débit. En déduire que la vidange est plus efficace avec le tuyau d'évacuation. On ne s'intéresse qu'à cette méthode de vidange par la suite.

3 - Montrer que la hauteur d'eau dans le réservoir vérifie l'équation différentielle

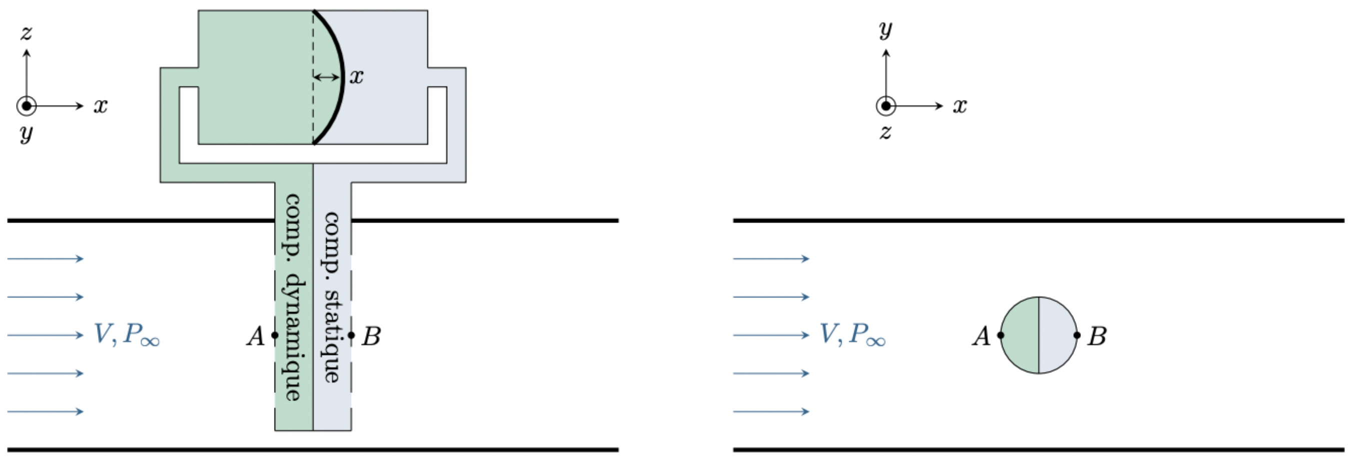
$$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = -\frac{d^2}{D^2}\sqrt{2g(h+L)}$$

4 - En déduire l'expression du temps de vidange.

5 - Si la pression au sein de l'écoulement devient inférieure à la pression de vapeur saturante de l'eau P_{sat}, l'eau se vaporise, ce qui se traduit par l'apparition de bulles qui perturbent l'écoulement et peuvent aller jusqu'à endommager la conduite d'évacuation. Quelle est la longueur maximale L_{max} au delà de laquelle ce phénomène de cavitation apparaît ?

Exercice 4 : Sonde de Pitot moyennée

Les sondes de Pitot sont des capteurs de vitesse basés sur une mesure de pression différentielle. La vidéo (QR-code ci-contre) en présente une utilisation pour la mesure de d'écoulements industriels en conduite.



L'écoulement dans la conduite est supposé parfait, incompressible et stationnaire. On néglige les variations d'altitude dans la conduite et dans la sonde, si bien que la pression et la vitesse sont uniformes dans toute section de la conduite. On note V la vitesse débitante et P_∞ la pression dans l'écoulement loin de la sonde.

La membrane est de surface S supposée constante. Le décalage du centre de la membrane est noté x, et on admet que l'élasticité de la membrane tend à la ramener vers sa position de repos avec une force de rappel élastique linéaire $\overrightarrow{f} = -kx\overrightarrow{e}_x$.

1 - Citer quelques avantages des sondes de Pitot moyennées présentées dans la vidéo.

2 - Représenter en vue de dessus (schéma de droite de la figure 4) l'allure des lignes de courant de l'écoulement au voisinage de la sonde de Pitot.

3 - À partir du tracé précédent, justifier qualitativement que le point A est un point d'arrêt : $v_A = 0$. Exprimer la pression P_A en ce point. Par ailleurs, on admet qu'au point B on a $v_B = 0$ et $P_B \simeq P_\infty$: une zone de turbulence apparaît derrière la sonde, si bien que le théorème de Bernoulli en version ligne de courant devient inopérant.

4 - Écrire la condition d'équilibre de la membrane.

5 - En déduire l'expression de la vitesse d'écoulement en fonction du déplacement de la membrane.