DM n°3

Exercice n°1 (sur 3 points)

Soit B$\in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, tel que Sp(B)$\subset\{0,1,2\}$ et tr(B) = 3 et det(B)=0

1) a) Déterminer le polynôme caractéristique de B.
   b) B est-elle diagonalisable ? Justifier.
2) Que peut-on dire du polynôme caractéristique de B si : B$\in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, tel que Sp(B)$\subset\{0,1,2\}$ et tr(B) = 3 ?

Problème (sur 14 points)

Le but du problème est d'étudier les suites (u_n), (v_n) et (w_n) définies par :

$$u_0 = 1,\ v_0=0,\ w_0=0 \text{ et} : \forall n \in \mathbb{N} \begin{cases} u_{n+1} = 2u_n - v_n + w_n \\ v_{n+1} = v_n + w_n \\ w_{n+1} = -u_n + v_n + w_n \end{cases}$$

On note : $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et pour $n \in \mathbb{N}$, $X_n=\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$

Partie 1

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont A est la matrice dans la base canonique.

1) Montrer que le polynôme caractéristique de A est : $\chi_A(x) = (x-2)(x-1)^2$
2) Déterminer les valeurs propres de A.
3) La matrice A est-elle inversible ?
4) La matrice A est-elle diagonalisable ?

Partie 2 : On considère les éléments de $\mathbb{R}^3$: $b_1=(0,1,1)$; $b_2=(1,1,0)$ et $b_3=(0,0,1)$

1) Montrer que B=(b_1,b_2,b_3) est une base de $\mathbb{R}^3$
2) Montrer que la matrice de f dans la base B est : $T=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
3) On note P la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^3$ à B
   Donner l'expression de P.
4) Vérifier que $P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$
5) Quelle est la relation entre A,P,T et P^{-1} ?

Partie 3

1) On note T=N+D avec $N=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Déterminer D
2) Vérifier que N et D commutent.
3) Par récurrence, déterminer pour tout entier n supérieur ou égal à 2, N^n
4) Déterminer l'expression de T^n
5) Pour tout entier n, établir une relation entre X_{n+1}, A et X_n
6) En déduire l'expression de X_n en fonction de A, n et X_0
7) Déterminer A^n en fonction de T^n, P et P^{-1} (inutile de justifier par récurrence)
8) Déterminer l'expression des suites (u_n), (v_n) et (w_n) en fonction de n.