DM n°4

Exercice n°1 (sur 9 points)

On considère la fonction *f* définie sur ℝ par : $f(t) = sin(t)e^{-t}$

1) Justifier que f admette des primitives sur ℝ
2) Déterminer les primitives de f sur ℝ (conseil : il pourrait être judicieux de basculer en complexes)
3) Déterminer la primitive F de f vérifiant F(0) = $-\frac{1}{2}$
4) Vérifier que F est solution de l'équation différentielle (E) : y''+2y'+2y = 0
5) Résoudre (E)
6) Pour tout entier naturel n, on pose $I_n = \int_0^{\pi} \sin(t)e^{-nt}dt$
   a) Démontrer que pour tout entier naturel n, I_n est positive (sans en faire le calcul !)
   b) Calculer I_n
   c) Déterminer la limite de I_n en $+\infty$

Exercice n°2 (sur 5 points). Les 5 questions sont indépendantes :

1) Soit la fonction f définie sur]0,1[par $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x-1}$
   a) Montrer que f est bijective sur]0,1[et à valeurs dans un intervalle à préciser.
   b) Déterminer : $\lim_{n\to+\infty} f^{-1}(\frac{1}{2^n})$ où f^{-1} désigne la réciproque de la fonction précédente.
2) Factoriser dans $\mathbb{C}[X]$ puis dans ℝ[X] le polynôme $X^4 + 1$
3) Soit P=$X^4 - 5X^3 + 7X^2 - 5X + 6$
   a) Vérifier que i est une racine de P
   b) Pourquoi peut-on affirmer sans calculs que -i est également racine de P ?
   c) En déduire la factorisation de P sur ℝ[X]
4) Soit y une fonction dérivable solution de : y'+y = $e^t\cos(wt)$ avec w>0
   a) Pourquoi peut-on affirmer que la dérivée de y est elle-même continue ?
   b) Résoudre l'équation différentielle.
5) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, calculer : S = $\sum_{j=0}^{n}\sum_{i=0}^{j}\binom{j}{i}$

Exercice n°3 (sur 6 points)

Soit n un entier naturel, on se propose d'étudier les polynômes $T_n \in \mathbb{R}[X], vérifiant: \forall x \in \mathbb{R}, \cos(nx) = T_n(\cos(x))$

1) On fixe n, montrer que si un tel polynôme existe, alors il est unique.
2) Déterminer $T_0(X)$, $T_1(X)$ et $T_2(X)$
3) Soit $n \geq 1$, et x∈ ℝ, factoriser cos((n+1)x)+cos((n-1)x)
4) En déduire que si T_{n-1} et T_n sont bien définis, alors T_{n+1} est bien défini également et vérifie : $T_{n+1}(X) = 2XT_n(X) - T_{n-1}(X)$
5) Soit $n \geq 1$, déterminer le degré de T_n et son coefficient dominant.
6) Soit $n \geq 1$, résoudre pour x∈[0,π], l'équation cos(nx)=0 d'inconnue x.
7) En déduire l'ensemble des racines de T_n