TD Cinématique des fluides

Exercice 1 : Opérateurs vectoriels

1 On trouve :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f_1 &= y^2\,\vec{e}_x + (2xy - z^2)\,\vec{e}_y - 2yz\,\vec{e}_z \\
\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f_2 &= -\frac{y}{(x-y)^2}\,\vec{e}_x + \frac{x}{(x-y)}\,\vec{e}_y \\
\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f_3 &= -\frac{1+z}{a}\,\mathrm{e}^{-x/a}\,\vec{e}_x + \mathrm{e}^{-x/a}\,\vec{e}_z
\end{aligned}$$

2 On trouve :

$$\begin{aligned}
\mathrm{div}\,\vec{V}_1 &= 2(3xz + y) & \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{V}_1 &= \vec{0} \\
\mathrm{div}\,\vec{V}_2 &= y\cos(xy) - x\sin(xz) & \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{V}_2 &= z\sin(xz)\,\vec{e}_y - x\cos(xy)\,\vec{e}_z \\
\mathrm{div}\,\vec{V}_3 &= 0 & \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{V}_3 &= 3\omega\,\vec{e}_z
\end{aligned}$$

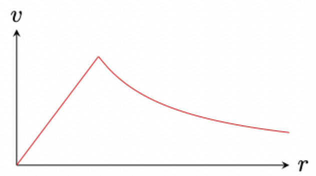
Champ de vitesse

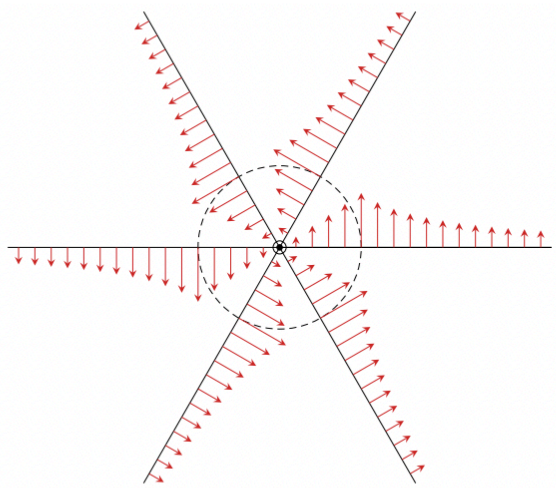
Exercice 2 : Tornade

1 Par continuité de la vitesse en $r = a$,

$$\omega a = \frac{K}{a} \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{K = \omega a^2\,.}$$

2 Les lignes de courant sont des cercles.





3 Comme $v_r = 0$, on a directement $\mathrm{div}\,\vec{v} = 0$, l'écoulement est donc incompressible.

4 Pour $r < a$,

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{v} = \frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}\omega r^2}{\mathrm{d}r}\,\vec{e}_z = \frac{1}{r}\times 2r\omega\,\vec{e}_z = 2\omega\,\vec{e}_z\,.$$

L'écoulement est donc tourbillonnaire dans le cœur de la tornade. Pour $r > a$,

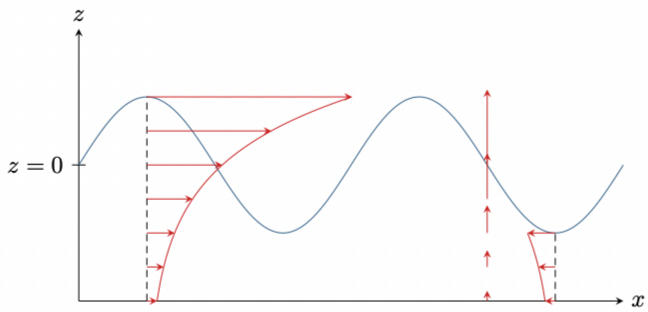
$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{v} = \frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}K}{\mathrm{d}r}\,\vec{e}_z = \vec{0}\,,$$

l'écoulement est donc irrotationnel hors du cœur.

Exercice 3 : Houle

$\boxed{1}$ Il s'agit d'une onde progressive harmonique qui se déplace dans le sens des x croissants.

$\boxed{2}$ À l'instant $t = 0$,
▷ en $x = 0$, $\vec{v} = H\omega\,\mathrm{e}^{kz}\,\vec{u}_x$;
▷ en $x = \lambda/4$ on a $kx = \pi/2$ donc $\vec{v} = H\omega\,\mathrm{e}^{kz}\,\vec{u}_z$;
▷ en $x = \lambda/2$ on a $kx = \pi$ donc $\vec{v} = -H\omega\,\mathrm{e}^{kz}\,\vec{u}_x$.
Le champ de vitesse est donc partout exponentiellement croissant, mais sa direction change, voir figure 2.



$\boxed{3}$ Calculons la divergence,

$$\operatorname{div}\vec{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = -Hk\omega\,\mathrm{e}^{kz}\sin(kx-\omega t) + 0 + Hk\omega\,\mathrm{e}^{kz}\sin(kx-\omega t) = 0\,.$$

L'écoulement de la houle est donc **incompressible**.

$\boxed{4}$ Calculons maintenant le rotationnel,

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{v} = \vec{\nabla}\wedge\vec{v} = \begin{bmatrix}\dfrac{\partial}{\partial x}\\ \dfrac{\partial}{\partial y}\\ \dfrac{\partial}{\partial z}\end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} v_x(x,z)\\ 0\\ v_z(x,z)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\ -\dfrac{\partial v_z}{\partial x} + \dfrac{\partial v_x}{\partial z}\\ 0\end{bmatrix} = \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}\right)\vec{u}_y$$

d'où on déduit

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{v} = \left[Hk\omega\,\mathrm{e}^{kz}\cos(kx-\omega t) - Hk\omega\,\mathrm{e}^{kz}\cos(kx-\omega t)\right]\vec{u}_y = \vec{0}\,.$$

L'écoulement est donc **irrotationnel**.

Débits

Exercice 4 : Robinet

$\boxed{1}$ L'eau accélère sous l'effet de la pesanteur. Comme elle est incompressible, il y a conservation du débit volumique Sv au cours de l'écoulement : une augmentation de vitesse impose une réduction de section du jet.

$\boxed{2}$ En supposant le jet cylindrique, la conservation du débit volumique s'écrit

$$\left(\pi\frac{d_1^2}{4}\right)v_1 = \left(\pi\frac{d_2^2}{4}\right)v_2 \qquad \text{soit} \qquad \boxed{v_2 = \left(\frac{d_1}{d_2}\right)^2 v_1 \simeq 3v_1\,.}$$

La vitesse a quasiment triplé.

Exercice 5 : Transfusion sanguine

$\boxed{1}$ La poche doit être injectée en une demi-heure, ce qui donne un débit volumique

$$Q = 0{,}2\,\mathrm{L}\cdot\mathrm{h}^{-1} = 5{,}6\cdot 10^{-8}\,\mathrm{m}^3\cdot\mathrm{s}^{-1}\,.$$

2 Le tuyau et l'aiguille étant cylindriques,

$$\boxed{V_{\text{tuy}} = \frac{Q}{\pi b^2} = 2{,}8 \cdot 10^{-3}\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1} \qquad \text{et} \qquad V_{\text{aig}} = \frac{Q}{\pi a^2} = 0{,}78\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}\,.}$$

Puisque $V_{\text{tuy}} \ll V_{\text{aig}}$, on peut supposer le sang en équilibre hydrostatique dans le tuyau souple et la poche ... mais ce n'est pas le cas dans l'aiguille. Calculons le nombre de Reynolds de cet écoulement,

$$\text{Re} = \frac{2a\,V_{\text{aig}}\,\rho}{\eta} = 160\,,$$

ce qui signifie que l'écoulement est **laminaire**.

> *La nature laminaire de l'écoulement est essentielle pour pouvoir le décrire par un profil de vitesse de type Poiseuille. S'il avait été turbulent, le profil d'écoulement (moyenné dans le temps) aurait été davantage voisin de celui d'un écoulement parfait.*

3 Le sang étant un fluide visqueux, sa vitesse doit être nulle au niveau de la paroi de l'aiguille, soit

$$\vec{v}(r{=}a) = \vec{0} \qquad \text{donc} \qquad 1 - \alpha a^2 = 0 \qquad \text{et} \qquad \boxed{\alpha = \frac{1}{a^2}\,.}$$

4 Relions le débit volumique à la différence de pression.

$$\begin{aligned}
Q &= \iint_{\text{section}} \vec{v}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}S}\\
&= \frac{(P_{\text{e}} - P_{\text{s}})\,a^2}{4\eta\ell} \iint \left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right) r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\\
&= \frac{(P_{\text{e}} - P_{\text{s}})\,a^2}{4\eta\ell} \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \times \int_0^a \left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right) r\,\mathrm{d}r\\
&= \frac{(P_{\text{e}} - P_{\text{s}})\,a^2}{4\eta\ell} \times 2\pi \times \left[\frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4a^2}\right]_0^a\\
&= \frac{(P_{\text{e}} - P_{\text{s}})\,a^2}{4\eta\ell} \times 2\pi \times \left(\frac{a^2}{2} - \frac{a^4}{4a^2}\right)\\
&= 2\pi\frac{(P_{\text{e}} - P_{\text{s}})\,a^2}{4\eta\ell} \times \left(\frac{a^2}{2} - \frac{a^2}{4}\right)\\
Q &= \frac{\pi\,(P_{\text{e}} - P_{\text{s}})\,a^4}{8\eta\ell}
\end{aligned}$$

d'où on déduit directement

$$\boxed{P_{\text{e}} - P_{\text{s}} = \frac{8\eta\ell}{\pi a^4} Q = 8{,}9 \cdot 10^3\,\text{Pa}\,.}$$

5 Le fluide étant supposé en équilibre hydrostatique dans le tuyau souple,

$$P_{\text{e}} = P_0 + \rho g H \qquad \text{et} \qquad P_{\text{s}} = P_0 + \Delta P\,.$$

On en déduit

$$\rho g H - \Delta P = \frac{8\eta\ell}{\pi a^4} Q$$

et ainsi

$$\boxed{H = \frac{1}{\rho g}\left(\frac{8\eta\ell}{\pi a^4} Q + \Delta P\right) = 96\,\text{cm}\,.}$$

Exercice 6 : Sténose artérielle

1 Le sang est un fluide visqueux, donc l'écoulement est de vitesse nulle sur les parois de l'artère. Ainsi,

$$v(r{=}R_0) = 0 \qquad \text{soit} \qquad 1 - aR_0^{\,2} = 0 \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{a = \frac{1}{R_0^{\,2}}\,.}$$

2 Le lien entre ΔP et les données de l'énoncé se fait par l'intermédiaire de la vitesse débitante. Par définition du débit volumique,

$$
\begin{aligned}
Q &= \iint_{\text{section}} \vec{v} \cdot \mathrm{d}\vec{S} \\
&= \frac{\Delta P\, R_0^2}{4\eta L_0} \iint \left(1 - \frac{r^2}{R_0^2}\right) r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta \\
&= \frac{\Delta P\, R_0^2}{4\eta L_0} \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \times \int_0^{R_0} \left(1 - \frac{r^2}{R_0^2}\right) r\,\mathrm{d}r \\
&= \frac{\Delta P\, R_0^2}{4\eta L_0} \times 2\pi \times \left[\frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4R_0^2}\right]_0^{R_0} \\
&= \frac{\Delta P\, R_0^2}{4\eta L_0} \times 2\pi \times \left(\frac{R_0^2}{2} - \frac{R_0^4}{4R_0^2}\right) \\
&= 2\pi \frac{\Delta P\, R_0^2}{4\eta L_0} \times \left(\frac{R_0^2}{2} - \frac{R_0^2}{4}\right)
\end{aligned}
$$

$$\boxed{Q = \frac{\pi\, \Delta P\, R_0^4}{8\eta L_0}}$$

On en déduit

$$U = \frac{Q}{\pi R_0^2} = \frac{\Delta P}{8\eta L_0} R_0^2 \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{\Delta P = \frac{8\eta L_0 U}{R_0^2} = 7\,\mathrm{Pa}\,.}$$

3 Par analogie avec une résistance électrique, ΔP est l'analogue de $U = \Delta V$ (différence de potentiel) et le débit volumique est l'analogue de l'intensité, qui n'est autre qu'un débit de charge. La différence de pression entraîne l'apparition d'un débit volumique, de même qu'une tension appliquée à une résistance entraîne l'apparition d'un courant. On peut également faire l'analogie avec la résistance thermique, que nous verrons dans quelques semaine : une différence de température entraîne l'apparition d'un flux thermique.

> *Tous ces phénomènes qui se décrivent avec un formalisme voisin sont appelés « phénomènes de transport ». Ils recouvrent entre autres le transport de charges électriques, le transport de masse par un fluide, la diffusion thermique, ou encore la diffusion de matière (pas au programme de PT).*

On déduit de ce qui précède

$$\boxed{R_H = \frac{8\eta L_0}{\pi R_0^4}}$$

4 À partir de l'expression précédente, il vient directement

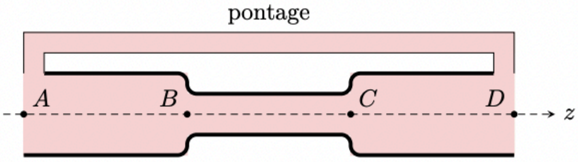
$$R_H = \frac{8\eta L}{\pi R_0^4} \qquad \text{et} \qquad R'_H = \frac{8\eta L}{\pi (R_0/2)^{\,4}} = \frac{128\eta L}{\pi R_0^4}\,.$$

Avec les notations de la figure 3, la différence de pression imposée par le cœur s'écrit

$$\Delta P = P_A - P_D = P_A - P_B + P_B - P_C + P_C - P_D\,.$$

Comme l'écoulement est incompressible, les trois portions d'artère sont traversées par le même débit volumique Q. Ainsi, en introduisant les résistances hydrauliques de chaque portion,

$$\Delta P = R_H Q + R'_H Q + R_H Q = (2R_H + R'_H)Q$$



ce qui permet d'identifier

$$\boxed{R_{H,\text{st}} = 2R_H + R'_H = \frac{144\eta L}{\pi R_0^4}\,.}$$

Les résistances hydrauliques sont dites **associées en série**, ce qui est cohérent avec le fait que le débit est l'analogue de l'intensité.

5 La différence de pression est la même dans les deux cas : en première approche, la présence de la sténose ne modifie pas le comportement du cœur. Ainsi,

$$\frac{Q_{\mathrm{st}}}{Q_{\mathrm{sain}}} = \frac{\Delta P / R_{H,\mathrm{st}}}{\Delta P / R_{H,\mathrm{sain}}} = \frac{3R_H}{2R_H + R'_H} = \frac{3}{2+16} \simeq 0{,}167\,.$$

La sténose réduit fortement le débit artériel, ce qui pose un problème de santé potentiel.

6 Le pontage est schématisé figure 3. La différence de pression est la même pour l'artère et le pontage, mais les débits s'ajoutent.

$$Q_{\mathrm{tot}} = Q_{\mathrm{st}} + Q_{\mathrm{pont}} = \left(\frac{1}{R_{H,\mathrm{st}}} + \frac{1}{R_{H,\mathrm{pont}}}\right)\Delta P$$

Le débit devant être identique à celui d'une artère saine soumise à la même différence de pression,

$$Q_{\mathrm{tot}} = Q_{\mathrm{sain}} \qquad \text{donc} \qquad \left(\frac{1}{R_{H,\mathrm{st}}} + \frac{1}{R_{H,\mathrm{pont}}}\right)\Delta P = \frac{\Delta P}{3R_H}$$

On en déduit

$$\frac{\pi R_0^4}{144\eta L} + \frac{\pi R_2^4}{8\eta\times 3L} = \frac{\pi R_0^4}{8\eta\times 3L} \qquad \text{soit} \qquad \frac{R_0^4}{6} + R_2^4 = R_0^4\,.$$

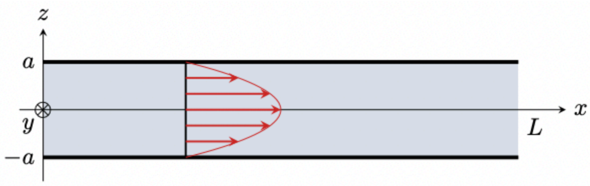
et ainsi

$$\boxed{\frac{R_2}{R_0} = \left(\frac{5}{6}\right)^{1/4} \simeq 0{,}95\,.}$$

Forces visqueuses

Exercice 7 : Écoulement de Poiseuille plan

1 - *Les lignes de courant sont des droites dirigées par $\vec{u}_x$. Le profil de vitesse dans une section droite de l'écoulement a une allure parabolique, avec une vitesse nulle sur les parois et maximale au centre,*



2 - *Il s'agit d'un écoulement visqueux car la vitesse du fluide est égale à la vitesse de la paroi en $x = \pm a$.*

3 - *L'écoulement est incompressible, car*

$$\mathrm{div}\,\vec{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 + 0 + 0\,.$$

En revanche, il est tourbillonnaire puisque le rotationnel du champ de vitesse

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{v} = -\frac{\partial v_x}{\partial z}\vec{u}_y = -\frac{2V_{\max}\,z}{a^2}\vec{u}_y$$

n'est pas uniformément nul.

4 - *Considérons une section droite (quelconque) de la conduite. Le vecteur surface élémentaire s'y écrit $\overrightarrow{dS} = dy\,dz\,\vec{u}_x$ donc*

$$\begin{aligned} D_V &= V_{\max}\int_{-b}^{+b} dy \int_{-a}^{+a}\left(1 - \frac{z^2}{a^2}\right) dz \\ &= V_{\max}\times 2b \times \left[z - \frac{z^3}{3a^2}\right]_{-a}^{+a} \\ &= 2bV_{\max}\left(a - \frac{a^3}{3a^2} + a - \frac{a^3}{3a^2}\right) \\ &= 2bV_{\max}\left(2a - \frac{2}{3}a\right) \\ &= \frac{8}{3}abV_{\max}\,. \end{aligned}$$

5 - La conduite compte quatre parois, nous allons donc calculer la force visqueuse sur chacune de ces parois avant de sommer pour obtenir la résultante. Dans tous les cas, on constate sur le profil de vitesse que le fluide « tire » sur la paroi dans la direction $+\vec{u}_x$, ce qui donne la direction de la force. Sur la paroi du haut, la force a pour norme

$$F_{\text{haut}} = \eta \times \left|\frac{\partial v_x}{\partial z}(z=a)\right| \times 2bL = \eta \times \left|\frac{-2a}{a^2}V_{\max}\right| \times 2bL = \frac{4bL}{a}\eta V_{\max}\,.$$

La force est la même sur la paroi du bas : on peut le comprendre qualitativement par symétrie ... ou poser le calcul et constater que le seul signe qui change disparaît dans la valeur absolue. De plus, les parois latérales ne subissent pas de force visqueuse car la vitesse ne dépend pas de y.

Finalement, après calcul,

$$\vec{F} = 2F_{\text{haut}}\vec{u}_x = \frac{8bL}{a}\eta V_{\max}\vec{u}_x\,,$$

et on peut identifier le débit volumique par exemple en exprimant $V_{\max} = 3D_V/8ab$, ce qui donne

$$\vec{F} = \frac{\cancel{8b}L}{a}\eta \times \frac{3D_V}{\cancel{8b}a}\vec{u}_x = \frac{3\eta L}{a^2}D_V\vec{u}_x$$

Exercice 8 : Glissement sur un plan incliné lubrifié

$\boxed{1}$ Le plus simple est de définir un axe x orienté le long de la pente vers le bas, et un axe y perpendiculaire à la pente vers le haut.

$\boxed{2}$ Le lubrifiant étant visqueux, sa vitesse est nulle en $y = 0$ et elle est égale à la vitesse V du solide en $y = e$. Le profil de vitesse dessiné étant clairement linéaire, on en déduit

$$\boxed{\vec{v} = v_x(y)\vec{e}_x = \frac{V}{e}y\,\vec{e}_x\,.}$$

$\boxed{3}$ La force visqueuse $\vec{F}$ tend à ralentir le solide dans son mouvement de glissement : on en déduit qu'elle est orientée selon $-\vec{e}_x$. De plus, en notant S la surface de contact entre le fluide et le solide, sa norme est donnée par

$$F = \eta S\left|\left.\frac{\partial v_x}{\partial y}\right|_{y=e}\right| = \eta S\frac{V}{e}$$

d'où on déduit

$$\boxed{\vec{F} = -\eta S\frac{V}{e}\vec{e}_x\,.}$$

$\boxed{4}$ • **Système :** solide de masse M ;

- **Référentiel :** terrestre $\mathcal{R}$, considéré galiléen ;
- **Bilan des forces :**
  - ▷ Poids $\vec{P} = m\vec{g} = Mg\sin\alpha\,\vec{e}_x - Mg\cos\alpha\,\vec{e}_y$;
  - ▷ Force de frottement exercée par le fluide : $\vec{F} = -\eta S\frac{V}{e}\vec{e}_x$;
  - ▷ Force de réaction normale du fluide : $\vec{R} = R\vec{e}_y$ (obligée car le solide ne peut pas traverser le fluide et le plan incliné ! ... et comme il n'est pas en contact avec le support, c'est forcément le fluide qui exerce la force).
- **Théorème de la résultante cinétique :** en notant $\vec{V} = V\vec{e}_x$ la vitesse du solide,

$$M\left.\frac{\mathrm{d}\vec{V}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}} = \vec{P} + \vec{F} + \vec{R}$$

soit en projection sur $\vec{e}_x$,

$$M\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = Mg\sin\alpha - \eta S\frac{V}{e}$$

que l'on peut réécrire sous la forme

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} + \frac{\eta S}{Me}V = g\sin\alpha\,.}$$

La vitesse limite atteinte correspond à la solution particulière de l'équation différentielle,

$$\boxed{V_{\text{lim}} = \frac{Meg\sin\alpha}{\eta S}\,.}$$

Exercice 9 : Déplacement d'un piston à huile

1 L'estimation la plus simple est

$$\boxed{\mathrm{GP} = \frac{P_2 - P_1}{h} = \frac{P_1}{h}\,.}$$

2 La section au travers laquelle s'écoule le fluide est une couronne circulaire (un anneau) compris entre les rayons R_1 et R_2. Elle a pour surface $S = \pi R_2^2 - \pi R_1^2$. Le débit volumique vaut donc

$$\boxed{D_V = v_\mathrm{d} S = \pi\alpha\frac{P_1}{h}(R_2^2 - R_1^2)\,.}$$

3 Raisonnons en coordonnées cylindriques. La force surfacique de viscosité subie par le cylindre intérieur a pour norme

$$F_\mathrm{surf} = \eta\left.\frac{\partial v}{\partial r}\right|_{r=R_1}\,.$$

Compte tenu des données à disposition, on peut approximer que l'ordre de grandeur de la vitesse dans l'interstice est v_d et que cette vitesse change sur une distance $R_2 - R_1$. Ainsi, en ordre de grandeur,

$$\left.\frac{\partial v}{\partial r}\right|_{r=R_1} \simeq \frac{v_\mathrm{d}}{R_2 - R_1} = \frac{\alpha P_1}{\eta h(R_2 - R_1)} \qquad \text{soit} \qquad F_\mathrm{surf} \simeq \frac{\alpha P_1}{h(R_2 - R_1)}\,.$$

En supposant que cette force surfacique est la même sur tout le cylindre, il vient

$$F_\mathrm{visq} = 2\pi R_1 h \times F_\mathrm{surf} \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{F_\mathrm{visq} = \frac{2\pi R_1 \alpha P_1}{R_2 - R_1}\,.}$$

4 Notons $\vec{u}$ le vecteur unitaire orienté de la gauche vers la droite de la figure. Le piston est soumis
- ▷ à la force $\vec{F} = F\vec{u}$ exercée par l'opérateur ;
- ▷ à la force visqueuse $\vec{F}_\mathrm{visq} = -F_\mathrm{visq}\vec{u}$, orientée vers la gauche car le piston se déplace vers la droite ;
- ▷ à la force pressante $\vec{F}_\mathrm{p} = (P_1 - P_2)\pi R_1^2\vec{u} = -P_1\pi R_1^2\vec{u}$.

Comme le mouvement du piston est qualifié de quasi-statique, on peut considérer que ces forces se compensent, d'où

$$F - \frac{2\pi R_1\alpha P_1}{R_2 - R_1} - P_1\pi R_1^2 = 0 \qquad \text{soit} \qquad \boxed{F = \frac{2\pi R_1\alpha P_1}{R_2 - R_1} + P_1\pi R_1^2\,.}$$

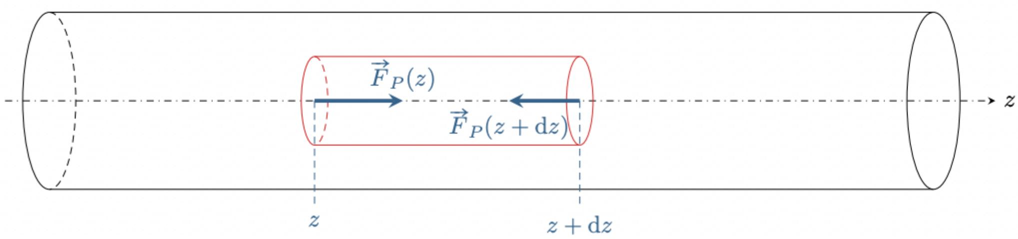
Exercice 10 : Démonstration du profil de Poiseuille

1 La conduite est invariante par toute rotation autour de son axe, il est donc logique que le champ des vitesses soit indépendant de la coordonnée angulaire θ. De plus, l'écoulement se faisant dans la direction de la conduite, il est raisonnable de supposer que le champ des vitesses est colinéaire à l'axe $\vec{e}_z$.

2 L'écoulement étant incompressible,

$$\mathrm{div}\,\vec{v} = 0 \qquad \text{soit} \qquad \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0$$

ce qui signifie que v_z est « une constante par rapport à z », c'est-à-dire que v_z est indépendant de z.



3 Le système (Σ) est compris entre les abscisses z et $z + \mathrm{d}z$, voir figure 4. Il subit donc

$$\mathrm{d}\vec{F}_P = \vec{F}_P(z) + \vec{F}_P(z+\mathrm{d}z) = P(z)\,\pi r^2\,\vec{e}_z - P(z+\mathrm{d}z)\,\pi r^2\,\vec{e}_z = -\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}z}\,\pi r^2\,\mathrm{d}z\,\vec{e}_z$$

4 La portion de cylindre en contact avec des particules fluides de vitesse différente est simplement constituée de la surface latérale, de surface $\mathrm{d}S = 2\pi r\,\mathrm{d}z$. Ainsi,

$$\boxed{\mathrm{d}\vec{F}_{\text{visq}} = \eta \frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}r}\, 2\pi r\,\mathrm{d}z\,\vec{e}_z\,.}$$

5 Comme (σ) est un système fermé en mouvement à vitesse constante, alors d'après le théorème de la résultante cinétique, la somme des forces qu'il subit est nulle. On a donc

$$\mathrm{d}\vec{F}_P + \mathrm{d}\vec{F}_{\text{visq}} = \vec{0} \qquad \text{soit} \qquad -\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}z}\,\pi r^2\,\mathrm{d}z + \eta\frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}r}\,2\pi r\,\mathrm{d}z = 0$$

ce qui conduit bien à l'équation

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}r} = \frac{r}{2\eta}\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}z}\,.}$$

6 Comme v_z ne dépend pas de z, dériver par rapport à z l'équation précédente conduit à

$$\frac{\mathrm{d}^2 P}{\mathrm{d}z^2} = 0 \qquad \text{soit} \qquad \frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}z} = k = \text{cte}\,.$$

Par séparation des variables et intégration entre les deux extrémités de la conduite, on obtient

$$\int_{P_0+\Delta P}^{P_0} \mathrm{d}P = k\int_0^L \mathrm{d}z \qquad \text{d'où} \qquad k = -\frac{\Delta P}{L}\,.$$

7 Le fluide étant visqueux, sa vitesse est nulle au contact de la paroi : $v(r=R) = 0$. Ainsi,

$$\frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}r} = -\frac{\Delta P}{2\eta L} r \qquad \text{soit} \qquad \int_0^{v_z} \mathrm{d}v_z = -\frac{\Delta P}{2\eta L}\int_R^r r\,\mathrm{d}r$$

ce qui donne finalement

$$v_z(r) = -\frac{\Delta P}{2\eta L}\left(\frac{r^2}{2} - \frac{R^2}{2}\right)$$

ce qui permet de conclure

$$\boxed{\vec{v} = \frac{\Delta P}{4\eta L}(R^2 - r^2)\,\vec{e}_z\,.}$$