TD Dynamique des fluides

Écoulements parfaits

Exercice 1 : Débitmètre de Venturi

1 L'écoulement étant incompressible,

$$D_V = v_1 S_1 = v_2 S_2 \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{v_2 = \frac{S_1}{S_2} v_1 > v_1 \,.}$$

En négligeant les pertes de charge et en supposant le débitmètre horizontal, le théorème de Bernoulli donne

$$\frac{p_1}{\rho} + \frac{v_1^2}{2} = \frac{p_2}{\rho} + \frac{v_2^2}{2} \,,$$

on a donc $p_2 < p_1$ et donc

$$\boxed{\Delta p > 0 \,.}$$

2 En remplaçant les vitesses $v_{1,2}$ par $D_V/S_{1,2}$ on obtient en réécrivant le théorème de Bernoulli

$$\frac{\Delta p}{\rho} = \frac{D_V^2}{2S_2^2} - \frac{D_V^2}{2S_1^2} \qquad \text{soit} \qquad \frac{D_V^2}{2}\left(\frac{1}{S_2^2} - \frac{1}{S_1^2}\right) = \frac{\Delta p}{\rho}$$

et finalement

$$\boxed{D_V = \sqrt{\frac{2\Delta p}{\rho\left(\dfrac{1}{S_2^2} - \dfrac{1}{S_2^2}\right)}} \,.}$$

Exercice 2 : Formule de Torricelli

> *« Approximation de régime quasi-permanent » signifie que la hauteur d'eau dans le réservoir varie suffisamment lentement pour pouvoir appliquer toutes les relations du régime permanent (conservation du débit, Bernoulli, etc.)*

1 L'eau étant un fluide incompressible, on a par conservation du débit volumique

$$D_V = S\, v_A = s\, v_B \qquad \text{soit} \qquad \boxed{v_B = \frac{S}{s} v_A \gg v_A \,.}$$

2 Appliquons le théorème de Bernoulli entre la surface libre du réservoir et la sortie de l'orifice (on pourrait tout aussi bien dire « sur la ligne de courant allant de A à B »), évidemment sans puissance indiquée et en négligeant les pertes de charge,

$$\frac{P_A}{\rho} + \frac{v_A^2}{2} + gH = \frac{P_{\text{atm}}}{\rho} + \frac{v_B^2}{2} + 0 \qquad \text{soit} \qquad \frac{P_{\text{atm}}}{\rho} + 0 + gH = \frac{P_{\text{atm}}}{\rho} + \frac{v_B^2}{2} + 0$$

car la pression dans un jet libre est égale à la pression atmosphérique. On en déduit

$$v_B^2 = 2gH$$

et ainsi le débit volumique

$$\boxed{D_V = s\sqrt{2gH} \,.}$$

$\boxed{\mathbf{3}}$ La conservation du débit s'écrit

$$S\,v_A = s\,v_B = s\sqrt{2gH}\,.$$

Or la vitesse au point A est reliée à la dérivée de la hauteur d'eau dans le réservoir,

$$v_A = -\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t}$$

avec un signe $\ominus$ car $v_A > 0$ mais H diminue. On en déduit

$$-S\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t} = s\sqrt{2gH} \qquad \text{soit} \qquad \boxed{\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t} = -\alpha\sqrt{2gH}\,.}$$

> *On peut aussi comprendre ce résultat par conservation du volume. Le volume d'eau δV sortant du réservoir pendant dt peut d'une part être relié au débit volumique de sortie,*
>
> $$\delta V = D_V\,\mathrm{d}t = s\sqrt{2gH}\,\mathrm{d}t$$
>
> *et d'autre part à la variation de hauteur d'eau dans le réservoir,*
>
> $$\delta V = D_V\,\mathrm{d}t = S\,[H(t) - H(t+\mathrm{d}t)] = -S\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t\,.$$

$\boxed{\mathbf{4}}$ Une telle équation s'intègre par séparation des variables,

$$\frac{\mathrm{d}H}{\sqrt{H}} = -\alpha\sqrt{2g}\mathrm{d}t \qquad \text{soit} \qquad \int_{H_0}^{0}\frac{\mathrm{d}H}{\sqrt{H}} = -\alpha\sqrt{2g}\int_0^{\Delta t}\mathrm{d}t$$

ce qui donne

$$0 - 2\sqrt{H_0} = -\alpha\sqrt{2g}(\Delta t - 0)$$

et ainsi

$$\boxed{\Delta t = \frac{1}{\alpha}\sqrt{\frac{2H_0}{g}}\,.}$$

Exercice 3 : Vidange d'un réservoir

Considérons un axe z vertical vers le haut dont l'origine se trouve au fond du réservoir. Les écoulements sont supposés parfaits, incompressibles, et suffisamment lents (quasi-stationnaires) pour pouvoir appliquer la relation de Bernoulli.

$\boxed{\mathbf{1}}$ Comme $D \gg d$, on peut supposer la vitesse V de la surface libre du réservoir négligeable devant la vitesse de sortie. La relation de Bernoulli écrite entre la surface libre et la sortie du tuyau s'écrit

$$\cancel{\frac{P_{\mathrm{atm}}}{\rho}} + \frac{\cancel{V^2}}{2} + gh = \cancel{\frac{P_{\mathrm{atm}}}{\rho}} + \frac{{v_{\mathrm{s}}}^2}{2} - gL$$

d'où on déduit

$$\boxed{v_{\mathrm{s}} = \sqrt{2g(h+L)}\,.}$$

Le cas sans tuyau s'obtient en prenant $L = 0$.

$\boxed{\mathbf{2}}$ Le débit volumique de sortie s'écrit

$$D_V = \pi\frac{d^2}{4}v_{\mathrm{s}} \qquad \text{soit} \qquad \boxed{D_V = \pi\frac{d^2}{4}\sqrt{2g(h+L)}\,.}$$

Le débit est d'autant plus élevé que la longueur L du tuyau d'évacuation est élevée.

3 L'écoulement étant incompressible, le débit volumique se conserve. En notant V la vitesse à laquelle descend le niveau d'eau, on a donc

$$\frac{\pi D^2}{4} V = \frac{\pi d^2}{4} v_\mathrm{s}\,.$$

Or cette vitesse est évidemment reliée à la variation de hauteur d'eau par

$$V = \left|\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}\right| = -\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}$$

puisque la dérivée est négative car h décroît. On en déduit alors

$$-\frac{\pi D^2}{4}\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = \frac{\pi d^2}{4}\sqrt{2g(h+L)} \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = -\frac{d^2}{D^2}\sqrt{2g(h+L)}\,.}$$

4 Notons T le temps total de vidange du réservoir et h_0 la hauteur d'eau initiale. Par séparation des variables,

$$\begin{aligned}
\int_{h_0}^{0} \frac{\mathrm{d}h}{\sqrt{2g(h+L)}} &= -\frac{d^2}{D^2}\int_0^T \mathrm{d}t \\
\frac{1}{g}\int_0^{h_0} \frac{2g}{2\sqrt{2g(h+L)}}\,\mathrm{d}h &= +\frac{d^2}{D^2}\int_0^T \mathrm{d}t \\
\frac{1}{g}\left[\sqrt{2g(h+L)}\right]_0^{h_0} &= \frac{d^2}{D^2}T \\
\frac{1}{g}\left(\sqrt{2g(h_0+L)} - \sqrt{2gL}\right) &= \frac{d^2}{D^2}T
\end{aligned}$$

ce qui permet de conclure

$$\boxed{T = \frac{D^2}{d^2}\sqrt{\frac{2}{g}}\left(\sqrt{h_0+L} - \sqrt{L}\right)\,.}$$

5 Appliquons la relation de Bernoulli entre la sortie de la conduite d'évacuation ($P = P_\mathrm{atm}$, $v = v_\mathrm{s}$, $z = -L$) et un point quelconque de cette conduite ($P(z)$ inconnue, $v = v_\mathrm{s}$ car diamètre uniforme, $z < 0$ mais quelconque) :

$$\frac{P(z)}{\rho} + \cancel{\frac{v_\mathrm{s}^2}{2}} + gz = \frac{P_\mathrm{atm}}{\rho} + \cancel{\frac{v_\mathrm{s}^2}{2}} - gL \qquad \text{d'où} \qquad P(z) = P_\mathrm{atm} - \rho g(L+z)\,.$$

> *On remarque que l'on obtient un champ de pression de type hydrostatique. Cela peut s'interpréter grâce à l'incompressibilité de l'écoulement : tout le fluide descend la conduite « d'un bloc » à la même vitesse, donc en se plaçant dans le référentiel lié au fluide, également galiléen car en translation rectiligne uniforme par rapport au référentiel terrestre, on retrouve une situation d'hydrostatique.*

On constate que la pression est plus faible sur le haut de la conduite que sur le bas. D'après l'expression précédente, la valeur critique z_c à laquelle apparaît la cavitation est telle que $P(z_\mathrm{c}) = P_\mathrm{sat}$, soit

$$P_\mathrm{atm} - \rho g(L + z_\mathrm{c}) = P_\mathrm{sat} \qquad \text{soit} \qquad z_\mathrm{c} = \frac{P_\mathrm{atm} - P_\mathrm{sat}}{\rho g} - L\,.$$

Le phénomène apparaît si cette hauteur critique est atteinte à l'intérieur de la conduite, soit $z_\mathrm{c} < 0$, ce qui donne

$$\frac{P_\mathrm{atm} - P_\mathrm{sat}}{\rho g} - L < 0 \qquad \text{soit} \qquad \boxed{L > \frac{P_\mathrm{atm} - P_\mathrm{sat}}{\rho g}\,.}$$

> *Attention, il n'est pas possible de généraliser ce résultat à l'intérieur du réservoir : la section étant différente, la vitesse n'y est pas égale à v_s, et donc l'expression de la pression n'est pas valable.*

Exercice 4 : Sonde de Pitot moyennée

1 Les sondes de Pitot moyennées présentées dans la vidéo sont des systèmes sensibles, qui perturbent peu l'écoulement car elles sont de petite taille et qui peuvent fonctionner dans les deux sens d'écoulement.

2 Voir figure 4.

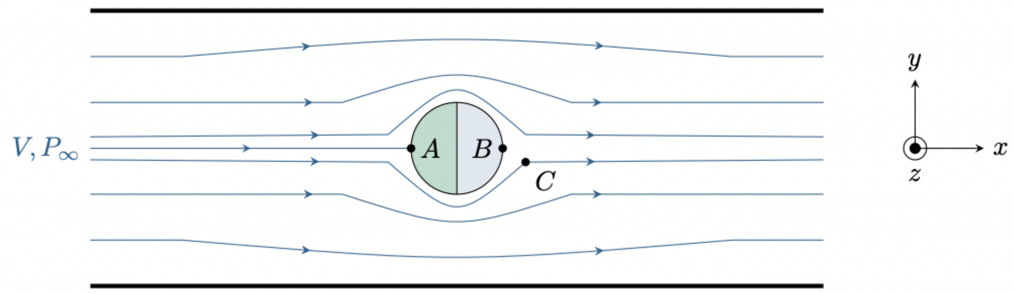

Figure 4 – Lignes de courant autour de la sonde de Pitot.

3 Raisonnons par symétrie. Le tracé des lignes de courant laisse penser que pour toute ligne de courant passant par la gauche de la sonde, il en existe une symétrique passant par la droite. Par conséquent, la ligne de courant correspondant à l'axe de la conduite arrive au point A de manière orthogonale à la sonde, soit $\vec{V}(A) = v_A \vec{e}_x$. Or en régime stationnaire, il n'y a pas/plus de fluide qui entre ni sort de la sonde (pas de communication entre les deux côtés de la membrane). Par conséquent, la vitesse v_A est nécessairement tangente à la sonde, c'est-à-dire $\vec{v}(A) \cdot \vec{e}_x = 0$ (même condition limite qu'au contact d'une paroi solide). En combinant avec la première condition,

$$\vec{v}(A) \cdot \vec{e}_x = v_A \vec{e}_x \cdot \vec{e}_x = v_A \qquad \text{donc} \qquad \boxed{v_A = 0\,.}$$

D'après le théorème de Bernoulli appliqué à la ligne de courant centrale,

$$\frac{P_\infty}{\rho} + \frac{V^2}{2} + g z_A = \frac{P_A}{\rho} + \frac{0^2}{2} + g z_A \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{P_A = P_\infty + \frac{1}{2}\rho V^2\,.}$$

4 Comme les effets d'altitude sont négligés, alors la pression est uniforme dans les deux compartiments de la sonde. La membrane, de surface S, subit :

- ▷ la force de pression côté dynamique, $\vec{F}_{\text{dyn}} = +P_A\, S \vec{e}_x$;
- ▷ la force de pression côté statique, $\vec{F}_{\text{stat}} = -P_B\, S \vec{e}_x$;
- ▷ la force de rappel élastique, $\vec{f} = -kx\vec{e}_x$.

Lorsque l'équilibre de la membrane est atteint,

$$\boxed{\vec{F}_{\text{dyn}} + \vec{F}_{\text{stat}} + \vec{f} = \vec{0}\,.}$$

5 En projetant cette relation et en remplaçant les pressions,

$$P_A\, S - P_B\, S - kx = 0$$
$$\left(P_\infty + \frac{1}{2}\rho V^2 - P_\infty\right) S - kx = 0$$
$$\frac{1}{2}\rho S V^2 = kx$$
$$\boxed{V = \sqrt{\frac{2kx}{\rho S}}}$$