Chapitre : **Espaces vectoriels normés**

Dans tout le chapitre, et comme d'habitude, K désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I. Généralités

1) Définition
   On appelle norme sur un K-espace vectoriel E, une application N :E→ $\mathbb{R}^+$ vérifiant :
   Pour tout x de E, N(x) = 0⟺x=0
   Pour tout λ de K, et x de E, N(λx) = |λ|N(x)
   Pour tout (x,y)∈E^2, N(x+y)≤N(x)+N(y)

2) Définition
   Tout espace vectoriel muni d'une norme est appelé espace vectoriel normé.

   Notations :
   On note (E,N) l'espace vectoriel muni de la norme N
   On note le plus souvent $\|.\|$ la norme N

3) Remarque
   Si $\|.\|$ désigne une norme, alors $\|0\| = 0$ et $\forall x \in E, \|-x\| = \|x\|$

4) Exemples
   L'application x→|x| est une norme sur K

   L'application K^2→ $\mathbb{R}^+$, (x,y) → max(|x| ;|y|) est une norme sur K^2, appelée norme infinie et notée $\|.\|_\infty$

   L'application K^2→ $\mathbb{R}^+$, (x,y) → |x|+|y| est une norme sur K^2, appelée norme 1 et notée $\|.\|_1$

   Démonstration : Il suffit de vérifier l'axiomatique !

5) Proposition
   Soit E un espace préhilbertien réel (c'est-à-dire un $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni d'un produit scalaire (|)) alors l'application : x→ $\sqrt{(x|x)}$ est une norme sur E.

   Démonstration : Il suffit de vérifier l'axiomatique de la norme (l'inégalité triangulaire s'obtient en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz)

6) Définition : Un vecteur x de E est dit unitaire si $\|x\| = 1$

7) Inégalité triangulaire
   Soit x et y deux vecteurs de E, alors, on a : $\boldsymbol{|\|x\| - \|y\||\leq \|x \pm y\| \leq \|x\| + \|y\|}$

   Démonstration :
   Commençons par montrer : $\|x\| - \|y\| \leq \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$
   Cela revient à montrer que : $\|x\| \leq \|x + y\| + \|y\|$ *et* $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$
   Or $\|x\| = \|x + y - y\| \leq \|x + y\|$ *et* $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$
   De plus, comme x et y ont des rôles symétriques, on a : $\|y\| - \|x\| \leq \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$*…*

8) Distance associée à une norme
On appelle distance associée à la norme $\|.\|$ l'application
d : $E^2 \to \mathbb{R}^+, (x,y) \to \|x-y\|$

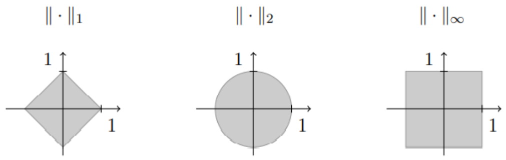
9) Inégalité triangulaire en termes de distance
Pour tout (u,v,w) de E^3, on a $|d(u,v)-d(v,w)| \leq d(u,v)+d(v,w)$

10) Boules ouvertes, boules fermées
On peut définir une **boule fermée** : $B_f(a,r) = \{x \in E, N(a-x) \leq r\}$

On peut définir une **boule ouverte** : $B(a,r) = \{x \in E, N(a-x) < r\}$

On peut définir une **sphère**: $S(a,r) = \{x \in E, N(a-x) = r\}$

On peut représenter dans $\mathbb{R}^2$ les boules centrées en $0_{\mathbb{R}^2}$ et de rayon 1 associées aux normes $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$.



11) Partie convexe
Une partie A de E est dite convexe si $\forall (x,y) \in A^2, \forall \lambda \in [0,1], (1-\lambda)x + \lambda y \in A$

12) Partie bornée
Une partie A de E est dite bornée s'il existe un réel positif R tel que :
$\forall a \in A, \|a\| \leq R$

13) Définition
Soit X un ensemble non vide.
Une application f :X→E est dite bornée si f(X) est une partie bornée de E.
Autrement dit : $\exists R \in \mathbb{R}^+, \forall x \in X, \|f(x)\| \leq R$

14) Généralisation

a) Normes sur K^n
Soit x un vecteur de K^n, en notant $(x_1,\ldots,x_n)$ ses composantes, on a :
$\|x\|_\infty = \max_{i \in [\![1,n]\!]} |x_i|$, $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$ et $\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2}$
(et les trois applications sont des normes…)

b) Espace des fonctions bornées
L'application : $B(X,K) \to \mathbb{R}^+$, $f \to \|f\|_\infty$ est une norme sur B(X,K), appelée norme infinie.

Démonstration : Il suffit de vérifier l'axiomatique en remarquant que {|f(x)|, x∈ X } est une partie non vide et majorée de R, donc elle possède une borne supérieure.

II. Suite d'éléments dans un evn

1) Définition

Soit (a_n) une suite d'éléments de E, et soit L un élément de E.
On dit que **la suite (a_n) converge vers L si la suite $(\|a_n - L\|_{n\in\mathbb{N}})$ tend vers 0.**

2) Propriété dite de l'unicité de la limite

Soit (a_n) une suite d'éléments de E, et soit L_1 et L_2 deux éléments de E
Si $a_n \to L_1$ et si $a_n \to L_2$ alors $L_1 = L_2$

Démonstration : $0 \leq d(L_1 ; L_2) \leq d(L_1 ; a_n) + d(L_2 ; a_n) \to 0$

3) Définition

Soit (a_n) une suite d'éléments de E, alors la suite est dite convergente s'il existe L un élément de E tel que: $a_n \to L$

Une suite qui n'est pas convergente est divergente.

Attention : La convergence d'une suite dépend de la norme choisie, ainsi une suite peut être convergente pour une norme et divergente pour une autre.

4) Opérations sur les limites

Si deux suites a_n et b_n convergent respectivement vers L_1 et L_2, et si α *et* β désignent deux scalaires, alors la suite $\alpha a_n + \beta b_n$ converge vers $\alpha L_1 + \beta L_2$

5) Proposition

Si une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers L, alors la suite $\|a_n\|$ converge vers $\|L\|$

Démonstration : On a : $0 \leq |\|a_n\| - \|L\|| \leq \|a_n - L\| \to 0$

6) Proposition

Toute suite convergente est bornée.

Démonstration :
Si a_n est convergente alors $\|a_n\|$ est convergente, donc bornée (voir le cours de l'an passé sur les suites)

7) Proposition

Toute sous-suite d'une suite convergente est convergente et a la même limite.

Démonstration :
Si (a_n) est une suite convergeant vers L, alors $\|a_n - L\|$ est une suite convergeant vers 0.
Soit $a_{\varphi(n)}$ une suite extraite de a_n, alors $\|a_{\varphi(n)} - L\|$ est une suite extraite de $\|a_n - L\|$, le cours sur les suites réelles de l'an passé permet d'affirmer que $\|a_{\varphi(n)} - L\|$ converge et de même limite que $\|a_n - L\|$, à savoir 0.
Ainsi $a_{\varphi(n)}$ converge vers L.

Exemple : Montrer que la suite de terme général $n(1+(-1)^n)$ diverge.

III. Topologie d'un evn

1) Définition
On dit qu'un point x est intérieur à une partie A de E s'il existe r>0 tel que B(x,r)⊂A.

2) Définition
Soit U une partie de E, on dit que **U est un ouvert de E, ou une partie ouverte de E si :** $\forall \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{U}, \exists \boldsymbol{r} > \boldsymbol{0}, \boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{r}) \subset \boldsymbol{U}$

Remarques : Si $B_f(x,r) \subset U$ alors $B(x,r) \subset U$, alors $B(x,\frac{r}{2}) \subset U$

3) Proposition
Toute boule ouverte est ouverte.

Démonstration : Faire un dessin !!!
Pour x dans une boule de centre a et de rayon R, il suffit de considérer la boule de centre x et de rayon : R-$\|x-a\|$

4) Proposition
La réunion d'une famille quelconque d'ouverts est ouverte.
L'intersection d'une famille finie d'ouverts est ouverte.

Attention : Une intersection quelconque d'ouverts peut ne pas être ouverte
En effet : Si $U_n =]\frac{-1}{n}; \frac{1}{n}[$ pour n entier non nul, alors $\cap U_n = \{0\}$ qui est fermée alors que U_n est ouvert.

Démonstration (pour l'union) :
Soit $\bigcup_{i=1}^{n} U_i$ une réunion d'ouverts.
Soit x$\in \bigcup_{i=1}^{n} U_i$, $\exists i_0$, tel que $x \in U_{i_0}$, or U_{i_0} est un ouvert donc il existe une boule ouverte centrée en x et incluse dans U_{i_0}, donc incluse dans $\bigcup_{i=1}^{n} U_i$.

5) Partie fermée
   a) Définition :
   On dit qu'une partie de E est une partie fermée de E, si son complémentaire est ouvert.

   Remarque : Il est clair que E et ∅ sont fermées.

   b) Caractérisation séquentielle des parties fermées.
   Une partie A de E est fermée si et seulement si la limite de toute suite convergente d'éléments de A appartient à A.

   Démonstration :
   Supposons A fermée
   Soit $a_n \to L$, une suite d'éléments de A convergeant vers L, montrons que L∈A.
   Supposons que L$\in E\backslash A$, comme A est fermée alors $E\backslash A$ est ouverte.
   Ainsi : $\exists r > 0$ tel que $B(L,r) \subset E\backslash A$
   Comme $a_n \to L$, $\exists n_0, \forall n \geq n_0, a_n \in B(L,r)$, donc $a_n \in E\backslash A$, ce qui est absurde puisque a_n est à valeurs dans A.

Réciproquement :
Supposons que toute suite convergente d'éléments de A appartient à A.
Et que A n'est pas fermée.
Comme A n'est pas fermée, alors $E\backslash A$ n'est pas ouverte. Ainsi, il existe $x\in E\backslash A$ tel que $\forall r>0$, $B(x,r)\not\subset E\backslash A$.
En particulier, pour $r=2^{-n}$, $B(x,2^{-n})\not\subset E\backslash A$.
Or $B(x,2^{-n})\cap A$ est non vide, donc on peut choisir un élément a_n dans $B(x,2^{-n})\cap A$
On construit ainsi, une suite a_n qui converge vers x et $x\notin A$

c) Proposition : Toute boule fermée est une partie fermée.

d) Proposition
L'intersection d'une famille quelconque de fermés est fermée.
La réunion d'une famille finie de fermés est fermée.

6) Point adhérent.
a) Définition
On dit qu'un point x est adhérent à une partie A de E si pour tout r>0, $B(x,r)\cap A\neq\emptyset$
L'ensemble des points adhérents à A est appelé adhérence de A, on le note $\overline{A}$

b) Proposition
Un point x est adhérent à une partie A si et seulement s'il existe une suite d'éléments de A qui converge vers x.

Remarque : Une partie A est fermée si $\overline{A}\subset A$ et alors $A=\overline{A}$

7) Intérieur
Soit E un espace vectoriel normé et A une partie de E. On dit qu'un point x est intérieur à A si A est un voisinage de x, cela revient à dire qu'il existe un r>0tel que la boule de centre x et de rayon r est contenue dans A.

On appelle intérieur de A l'ensemble des points intérieurs à A. L'intérieur de A est le plus grand ouvert contenu dans A.

8) Frontière : Soit E un espace vectoriel normé, A une partie non vide de E. **On dit qu'un point $x\in E$ est un point frontière de A si toute boule centrée en x rencontre à la fois A et le complémentaire de A.**

La frontière de A est l'ensemble des points frontières de A, notée Fr(A)

9) Densité
Soit A une partie de E.
Une partie D de A est dite dense dans A si l'une des 3 propriétés équivalentes est vérifiée :
-l'adhérence de D contient A
-pour tout a de A, et pour tout r>0, il existe $x\in D$, tel que $\|x-a\|\leq r$
-pour tout a de A, il existe une suite d'éléments de D qui converge vers a.

IV. Comparaison de normes

1) Définition

Soient N_1 et N_2 deux normes sur E.

On dit que N_1 est dominée par N_2 s'il existe un réel $\alpha>0$ tel que $N_1 \leq \alpha N_2$

Ainsi : $\forall x \in E, N_1(x) \leq \alpha N_2(x)$

2) Proposition

Soit N_1 et N_2 deux normes sur E. On dit que N_1 est dominée par N_2 s'il existe un réel $\alpha>0$ tel que $\forall x \in E, N_2(x) = 1 \Longrightarrow N_1(x) \leq \alpha$

3) Proposition

Soit N_1 et N_2 deux normes sur E, avec N_1 dominée par N_2

Si une partie de E est bornée pour la norme N_2 alors elle l'est également par N_1

4) Proposition

Soit N_1 et N_2 deux normes sur E, avec N_1 dominée par N_2

Si une suite converge vers un élément L de E pour la norme N_2 alors elle converge également vers L pour N_1.

Démonstration : Evidente, il suffit d'écrire les définitions de normes dominées et de suite convergente.

5) Normes équivalentes

a) Définition

Soit N_1 et N_2 deux normes sur E, on dit que N_1 et N_2 sont **équivalentes s'il existe deux réels α et β strictement positifs tels que :**

$\forall x \in E, \alpha N_1(x) \leq N_2(x) \leq \beta N_1(x)$

Remarque : **Ainsi si on peut construire une suite $(x_n) \in E^{\mathbb{N}}$ telle que :**
$\frac{N_1(x_n)}{N_2(x_n)} \to +\infty$ **et** $\frac{N_2(x_n)}{N_1(x_n)} \to 0$ **alors N_1 et N_2 ne sont pas équivalentes !**

b) Conservation du caractère borné d'une partie

Soit N_1 et N_2 deux normes équivalentes sur E, une partie est bornée pour N_1 si et seulement si elle est bornée pour N_2

c) Conservation du caractère convergent d'une suite

Soit N_1 et N_2 deux normes équivalentes sur E, si une suite converge vers un élément L de E pour la norme N_1 si et seulement si elle converge vers L pour la norme N_2

d) Conservation des ouverts et fermés

Soit N_1 et N_2 deux normes équivalentes sur E, une partie A de E est :

-ouverte pour N_1 si et seulement si elle est ouverte pour N_2

-fermée pour N_1 si et seulement si elle est fermée pour N_2

Démonstration :

Si A est fermée par exemple pour la norme N_1, montrons que A est fermée aussi pour N_2. Supposons que $a_n \to L$ avec a_n suite d'éléments de A, montrons donc que $L \in A$. La suite (a_n) converge pour N_1, elle converge donc pour N_2, donc $L \in A$

Si A est ouverte, alors son complémentaire est fermé or N_1 et N_2 conservent les fermés…donc les ouverts !

e) Equivalence des normes en dimension finie (théorème admis)
Dans un espace de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes.

V. Compléments de topologie

1) Suites de Cauchy

a) définition

Soit E un K-espace vectoriel normé

Soit (u_n) une suite bornée de E, soit $\boldsymbol{\delta_n} = \sup\{\|\boldsymbol{u_p} - \boldsymbol{u_q}\|, \boldsymbol{p} \geq \boldsymbol{n}, \boldsymbol{q} \geq \boldsymbol{n}\}$
On dit que u_n est de Cauchy si la suite réelle $\boldsymbol{\delta_n}$ tend vers 0.

b) Relations entre suite extraite et suite de Cauchy
-Une suite convergente est une suite de Cauchy
-Une suite extraite d'une suite de Cauchy est encore une suite de Cauchy
-Une suite de Cauchy n'est pas nécessairement convergente !

Démonstration :

Il suffit d'écrire les définitions de suite convergente, extraite et de Cauchy !

Pour la première proposition, on utilise l'inégalité triangulaire :

$\|u_p - u_q\| \leq \|u_p - L\| + \|L - u_q\| \ldots$

Contre-exemple : Sur $\mathbb{Q}$, $u_n=\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}$ est une suite de Cauchy mais elle converge vers $e \notin \mathbb{Q}$

2) Espaces complets

a) définition

Un espace vectoriel normé est dit complet si, dans cet espace, toute suite de Cauchy est convergente. On dit aussi que c'est un espace de Banach.

b) Propriétés

Toute partie fermée dans un espace vectoriel normé complet E est complète.

Toute partie complète d'un espace vectoriel normé est fermée.

Démonstration :
Soit A une partie fermée de E.
Soit (a_n) une suite de Cauchy d'éléments de A
Comme A inclus dans E, et E complet, on sait que (a_n) converge vers $L \in E$
Or A est fermée donc $L \in A$

La deuxième proposition est évidente…

c) Exemples :
Les espaces $\mathbb{R}^n$ *et* $\mathbb{C}^n$ sont complets.

Démonstration :
Lemme : (ℝ, ||) est complet
C'est une conséquence du théorème de Bolzano-Weierstrass.
Montrons que $\mathbb{R}^n$ *est complet.*
Comme en dimension finie, toutes les normes sont équivalentes, on peut travailler par exemple avec la norme 1.
Soit (x_p) *une suite de Cauchy de* $\mathbb{R}^n$
On a $x_p = (x_{p,1}, \dots, x_{p,n})$ *et* $\|x_p\|_1 = \sum_{k=1}^{n}|x_{p,k}|$
On a: $\forall(p,q) \in \mathbb{N}^2, |x_{p,k} - x_{q,k}| \leq \|x_p - x_q\|_1$ *donc* $x_{p,k}$ *est une suite de Cauchy de* ℝ *complet donc elle converge, soit* $y_k = \lim\limits_{p\to+\infty} x_{p,k}$
Soit $y=(y_1, \dots, y_n)$

d) Convergence et coordonnées
La convergence d'une suite se ramène à la convergence de ses coordonnées.

Ainsi, si $z_n \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, alors $z_n \to L \Leftrightarrow [Re(z_n) \to Re(L) et\ Im(z_n) \to Im(L)]$

3) Espaces compacts
a) définition
Une partie A d'un espace vectoriel normé est dite compacte si toute suite d'éléments de A admet une sous suite qui converge dans A.

b) Propriété
Dans un espace vectoriel normé, une partie compacte est fermée et bornée.

Démonstration :
Soit A une partie compacte non vide d'un evn E.
Montrons que A est bornée
Supposons que A ne soit pas bornée
Comme A n'est pas borné, il existe deux éléments de A tels que la distance les séparant soit supérieure à un.
Appelons les a_0 *et* a_1*, ainsi* $\|a_0 - a_1\| \geq 1$
Soit $a_0,\dots,a_{n-1}$ *n éléments de A tels que :* $\forall(i,j) \in [\![0, n-1]\!], \|a_i - a_j\| \geq 1$

Soit B la réunion de toutes les boules ouvertes centrées en a_i *et de rayon 1.*
En tant qu'union d'ouverts, B est ouverte.
Comme A n'est pas bornée, A n'est pas incluse dans B, donc il existe $a_n \in A \setminus B$
Donc $\forall(i,j) \in [\![0, \boldsymbol{n}]\!], \|a_i - a_j\| \geq 1$
Toute suite extraite de a vérifiera : $\|a_i{}' - a_j{}'\| \geq 1$*, donc ne converge pas !*

Montrons que A est fermée.
Montrons donc que $\bar{A} \subset A$
Soit $a \in \bar{A}$*, il existe* $a_n \to a$*, or A compact donc il existe une sous suite de* a_n *qui converge dans A. Mais toutes les sous-suites ont la même limite donc* $a \in A$

c) Fermé dans un compact (admis)
Soit A une partie compacte d'un espace vectoriel normé E
Si B est une partie fermée de A alors B est une partie compacte de E

d) Théorème (admis)
Une partie de $\mathbb{R}^n$ *et* $\mathbb{C}^n$ est compacte si et seulement si elle est fermée et bornée.

4) Continuité

a) définition

Soit (E,$\| \ \|_E$) et (F, $\| \ \|_F$) deux K-espaces vectoriels normés
Soit f une fonction définie sur un ensemble D (partie non vide de E) à valeurs dans F.
On dit que f admet une limite b∈F en a∈ D,
Si : $\forall\varepsilon > 0, \exists\alpha > 0, \forall x \in A, \|x - a\| < \alpha \implies \|f(x) - b\|_F < \varepsilon$
On note $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$

Une fonction f est continue en a∈ D si f admet une limite en a

Remarque : Une fonction f est dite continue sur A⊂D si f est continue en tout point a de A.

b) Exercice « classique » :
Soit E et F deux evn, soit f :E→F, continue.
Soit A⊂E Montrer que si A est dense dans E, alors f(A) est dense dans f(E).

A est dense dans E si et seulement si tout point de E est limite d'une suite d'éléments de A.
Soit y∈f(E), il existe x∈E, tel que y=f(x)
Puisque A est dense dans E, $\exists(x_n) \in E^{\mathbb{N}}$ telle que : $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x$
Par continuité de f : $\lim\limits_{n\to+\infty} f(\,x_n) = f(x)$
Et y est limite d'une suite d'éléments de f(A)…

c) Théorème important
Soit f une fonction définie sur un ensemble D à valeurs dans F (F étant un evn et D une partie de E evn)
Les propositions suivantes sont équivalentes :
-f est continue
-pour tout ouvert V de F, f^{-1}(V) ouvert de A
-pour tout fermé W de F, f^{-1}(W) fermé dans A.

Démonstration :
Soit V un ouvert de F
Pour tout a∈ $f^{-1}(V)$, b=f(a)∈V
Or V est un ouvert, donc V est un voisinage de b
Donc il existe U voisinage de a tel que U∩A⊂ $f^{-1}(V)$,
Ainsi, $f^{-1}(V)$ est voisinage de a relatif à A.

d) Exercice « classique »
Soit E et F deux evn, soit f,g :E→F, continue.
Montrer que A={x∈ $E, f(x) = g(x)$} est fermé et B={x∈ $E, f(x) < g(x)$} est ouvert.

Il suffit de poser $\varphi(x) = f(x) - g(x)$, application continue.
A = $\varphi^{-1}(\{0\})$, or φ est continue et $\{0\}$ est un fermé donc A fermé.
B = $\varphi^{-1}(]-\infty, 0[)$, or φ est continue et $]-\infty, 0[$ est un ouvert donc B ouvert.

5) Continuité uniforme
Une fonction f de D dans F est dite uniformément continue sur A⊂D, **si** $\forall \boldsymbol{\varepsilon} > \mathbf{0}, \exists \boldsymbol{\alpha} > \mathbf{0}, \forall (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in \boldsymbol{A}^2, \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\| < \boldsymbol{\alpha} \Longrightarrow \|f(x) - f(y)\|_F < \boldsymbol{\varepsilon}$

Remarque : Si f est uniformément continue sur A, alors f est continue sur A.

6) Fonctions lipschitzienne
Une fonction définie sur D est dite lipschitzienne sur A⊂D si R=$\{\frac{\|f(x)-f(y)\|_F}{\|x-y\|}$ avec (x,y)$\in \boldsymbol{A^2 et\ x \neq y}$} est borné.

Pour k =sup(R), on précise que f est k- lipschitzienne

7) Théorème
a) Théorème de Heine : **Soit A une partie compacte de E et f : A→F une application continue, alors f est uniformément continue et f(A) est une partie compacte de F**

Démonstrations
-Si f n'est pas uniformément continue, alors on pourrait construire une suite extraite x_n-y_n telle que $\|x_n - y_n\| \leq \frac{1}{n}$ *et* $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon$ *mais on pourrait alors extraire une suite qui elle va converger, d'où une contradiction.*

-Par définition, toute suite d'éléments de f(A) s'écrit f(x_n) or x_n est une suite d'éléments de A compacte…

b) Exercice classique n°1
Soit (x_n) une suite convergente d'un evn E. Soit x sa limite.
Montrer que $\{x_n, n \in \mathbb{N}\} \cup \{x\}$ est un compact de E.

Toute suite extraite de $\{x_n, n \in \mathbb{N}\} \cup \{x\}$ converge dans $\{x_n, n \in \mathbb{N}\} \cup \{x\}$ …

c) Exercice classique n°2
Soit E un evn, montrer que toute partie compacte A de E est complète.

Soit A compacte.
Soit a_n une suite de Cauchy dans A, montrons qu'elle converge dans A.
Il existe une sous-suite qui converge vers une valeur d'adhérence L.
Or comme a_n est de Cauchy, elle va converger vers L ($\|a_n - L\| \leq \|a_{\varphi(n)} - L\| + \|a_n - a_{\varphi(n)}\| \leq \varepsilon + \varepsilon$…)

8) Cas des applications linéaires
Pour une fonction f de E dans F, linéaire les propositions suivantes sont équivalentes :
-f est continue sur E
-f est continue au point 0_E
-f est bornée sur la boule unité fermée : $B_f(0_E,1)$
-il existe k$\geq$ 0 tel que $\forall \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{E}, \|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\|_{\boldsymbol{F}} \leq \boldsymbol{k}\|\boldsymbol{x}\|_{\boldsymbol{E}}$
-f est k-lipischitzienne

Démonstration :
ii)⇒iii) $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \|x\|_E \leq \eta \Rightarrow \|f(x) - f(0)\|_F \leq \varepsilon$
En particulier pour $\varepsilon = 1, \exists \eta > 0, \|x\|_E \leq \eta \Rightarrow \|f(x)\|_F \leq 1$
Soit $x \in B_f(0_E,1)$, $\exists \alpha > 0$ *tel que* $\|\alpha x\| \leq \eta \Rightarrow \|f(\alpha x)\|_F \leq 1$, *soit* $\|f(x)\|_F \leq \frac{1}{\alpha}$

iii)⇒iv) $\exists k > 0, \forall x \in E, \|x\|_E \leq 1 \Rightarrow \|f(x)\|_F \leq k$
Soit $x \in E$, $\left\|f(\frac{x}{\|x\|})\right\|_F \leq k$ … *Les autres implications sont évidentes !*

9) Cas de la dimension finie
-Tout espace vectoriel normé de dimension finie est complet.
Démonstration indicative : Le produit d'espace complet est complet

-Dans un evn, tout sous-espace de dimension finie est complet donc fermé.
Démonstration : Une suite qui converge est une suite de Cauchy, comme l'espace est complet, la limite est dans E, donc $\bar{E} \subset E$

-Dans un evn de dimension finie, une partie est compacte si et seulement si elle est fermée et bornée.
Démonstration : C'est une application des propositions précédentes sur les compacts.
-Soient E et F deux espaces vectoriels normés, E est de dimension finie, alors toute application linéaire de E dans F est continue.
Démonstration : C'est une application directe des propositions sur la continuité.

10) Espaces de Hilbert
Un espace préhilbertien E (c'est-à-dire, muni d'un produit scalaire) est dit de Hilbert s'il est complet.

11) Norme d'application
a) Définition
Soit f$\in L_c(E,F)$, l'application f$\rightarrow |||f||| = sup_{\|x\|\leq 1}\|f(x)\|_F$ est une norme.

Démonstration : L'axiomatique de la norme est vérifiée facilement.

Remarque : La notation norme triple $|||f|||$ est souvent remplacée par $\|f\|$

b) Proposition
Soit f$\in L_c(E,F)$, $|||f||| = sup_{\|x\|_E\leq 1}\|f(x)\|_F = sup_{\|x\|=1}\|f(x)\|_F = sup_{x\in E^*}\frac{\|f(x)\|_F}{\|x\|_E}$

Démonstration : En exercice (N°26)

c) Proposition

Soit f$\in \boldsymbol{L_c(E,F)}$, alors $\forall \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{E}, \|\boldsymbol{f(x)}\|_{\boldsymbol{F}} \leq |||\boldsymbol{f}||| \|\boldsymbol{x}\|_{\boldsymbol{E}}$

Démonstration :

Pour x$\neq 0$, $|||f||| = sup_{x \in E^*} \frac{\|f(x)\|_F}{\|x\|_E}$, *donc* $\frac{\|f(x)\|_F}{\|x\|_E} \leq |||f|||$ *et* $\|f(x)\|_F \leq |||f||| \|x\|_E$

Comme la relation est aussi vérifiée pour x=0, on a finalement : $\forall x \in E, \|f(x)\|_F \leq |||f||| \|x\|_E$

12) Un exemple important : les espaces l^p

a) Définition

Pour $1 \leq p < +\infty$, l'espace l^p est l'ensemble des suites (x_n) des nombres réels ou complexes telles que : $\sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^p < +\infty$

Pour p=+∞, $l^\infty = \{(x_n), sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n| < +\infty\}$

b) Normes

La norme associée à l'espace l^p est : $\|x\|_p = (\sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^p)^{\frac{1}{p}}$

Pour, l^∞, $\|x\|_\infty = sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n|$

c) Propriétés :

-Les espaces l^p munis de leurs normes associés sont complets.

-Si $1 \leq p \leq q \leq +\infty$, alors $l^p \subset l^q$, plus précisément, si x$\in l^p$ alors x$\in l^q$ et $\|x\|_q \leq \|x\|_p$

Exemple : Soit (x_n) la suite définie par $x_n = (-1)^n$, montrer que $(x_n) \in l^\infty$ et préciser $\|x_n\|_\infty$