

Exo n°5

Rapports: La factorisation et la recherche de racines coïncident sur $\mathbb{C}$!

On va donc résoudre $X^n + 1 = 0$

$$X^n = -1$$

$$X^n = e^{i\pi} \text{ donc si } X = re^{i\theta}, \text{ on a } r^n e^{in\theta} = e^{i\pi} \text{ avec } r > 0$$

$$\begin{cases} r=1 \\ n\theta = \pi + 2k\pi \text{ avec } k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket \end{cases} \quad \text{Ici, on n'est pas obligé de se mettre à cheval sur 0 puisque la décomposition n'est pas sur } \mathbb{R}.$$

$$\begin{cases} \theta = \frac{\pi}{n} + \frac{2k\pi}{n}, \quad k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket \end{cases}$$

$$\text{Finalement: } \boxed{X^n + 1 = \prod_{k=0}^{n-1} \left(X - e^{i(\frac{\pi+2k\pi}{n})} \right)}$$

Exercice n°8

Par le th. de la division euclidienne, $\exists (Q, R) \in \mathbb{R}[X]^2$ tels que:

$$X^n + nX^{n-1} + X^2 + 1 = Q(X)(X+1)^2 + R(X) \text{ avec } \deg R < \deg (X+1)^2$$

$$\text{Ainsi } \deg R \leq 1 \text{ d'où: } \exists (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \text{ tq } R(X) = \alpha X + \beta$$

$$X^n + nX^{n-1} + X^2 + 1 = Q(X)(X+1)^2 + \alpha X + \beta$$

Nous avons déjà rencontré ce genre d'exercices, l'idée étant d'annuler le bloc $Q(X)(X+1)^2$ en prenant les racines de $(X+1)^2$ sauf que: $(X+1)^2$ a une seule racine... mais double!!!

On commence: par $X = -1$

$$(-1)^n + n(-1)^{n-1} + (-1)^2 + 1 = Q(-1)(-1+1)^2 + \alpha(-1) + \beta$$

$$(-1)^n + n(-1)^{n-1} + 2 = -\alpha + \beta$$

$$\text{Et on dérive: } nX^{n-1} + n(n-1)X^{n-2} + 2X = Q'(X)(X+1)^2 + 2Q(X)(X+1) + \alpha$$

$$n(-1)^{n-1} + n(n-1)(-1)^{n-2} + 2 = \underbrace{Q'(-1)(0)^2}_{=0} + \underbrace{2Q(-1) \cdot 0}_{=0} + \alpha$$

$$\text{donc } \alpha = n(-1)^{n-1} + n(n-1)(-1)^{n-2} + 2 \text{ mais } (-1)^{n-1} = -(-1)^{n-2}$$

$$\boxed{\alpha = n(-1)^{n-1} - n(n-1)(-1)^{n-1} + 2}$$

$$\text{et } \beta = \alpha + (-1)^n + n(-1)^{n-1} + 2$$

$$\beta = n(-1)^{n-1} - n(n-1)(-1)^{n-1} + (-1)^n + n(-1)^{n-2} + 2$$

$$\beta = n(-1)^{n-1} (1 + 1 - (n-1)) - (-1)^{n-1}$$

$$\boxed{\beta = n(-1)^{n-1} (2 - n + 1) = (2 - n)n(-1)^{n-1}}$$

$$\text{et } \boxed{R(X) = \alpha X + \beta}$$

Exo n°15

$$P(X) = X^4 - 2X^3 + 6X^2 - 2X + 5$$

1) Ry i racine de P.

$$P(i) = (i^4) - 2i^3 + 6i^2 - 2i + 5 = 1 + 2i - 6 - 2i + 5 = 0$$

$$\text{donc } \boxed{i \text{ racine de } P}$$

2) On va commencer sur $\mathbb{C}[X]$

Rappel: P est réel mais a une racine complexe donc -i est racine aussi.
et P(X) est divisible par $(X-i)(X+i) = X^2 + 1$

$$\begin{array}{r|l} X^4 - 2X^3 + 6X^2 - 2X + 5 & X^2 + 1 \\ -(X^4 + X^2) & \hline -2X^3 + 5X^2 - 2X + 5 & \\ -(-2X^3 - 2X) & \hline 5X^2 + 5 & \end{array}$$

$$X^4 - 2X^3 + 6X^2 - 2X + 5 = (X^2 + 1)(X^2 - 2X + 5)$$

Il reste à factoriser $X^2 - 2X + 5$.

$$X^2 - 2X + 5 = 0$$

$$\Delta = 4 - 4 \times 5 = -16$$

$$X = \frac{2 \pm 4i}{2} = 1 \pm 2i$$

$$\text{donc } \boxed{\begin{array}{l} X^4 - 2X^3 + 6X^2 - 2X + 5 = (X-i)(X+i)(X-(1-2i))(X-(1+2i)) \text{ sur } \mathbb{C}[X] \\ X^4 - 2X^3 + 6X^2 - 2X + 5 = (X^2 + 1)(X^2 - 2X + 5) \text{ sur } \mathbb{R}[X] \end{array}}$$

Exo n°17

Déterminer $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que: $P(X^2) = (X^2 + 1)P(X)$

Comme dans une exo précédente, on sait que le degré sera un outil pertinent!

D'abord, si $P = 0$ alors $P(X^2) = (X^2 + 1)P(X)$ donc le polynôme nul convient.

Est-ce le seul?

$$\text{Si } P \neq 0, \deg P(X^2) = (\deg P) \times 2 \quad (\text{Si vous avez un doute, remplacez } P \text{ par } X^m) \\ \deg((X^2 + 1)P(X)) = \deg P + 2$$

$$\text{On cherche } 2 \deg P = \deg P + 2 \text{ donc } \deg P = 2$$

$$\text{Soit } (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \text{ et } P(X) = aX^2 + bX + c$$

$$\begin{aligned} P(X^2) &= aX^4 + bX^2 + c & \text{et } (X^2 + 1)P(X) &= (X^2 + 1)(aX^2 + bX + c) \\ & & &= aX^4 + bX^3 + cX^2 + aX^2 + bX + c \\ & & &= aX^4 + bX^3 + (a+c)X^2 + bX + c \end{aligned}$$

$$\text{Par identification: } \begin{cases} a = a \\ 0 = b \\ b = a+c \\ b = 0 \\ c = c \end{cases} \quad \begin{cases} b = 0 \\ a = -c \\ a \in \mathbb{R} \end{cases} \quad \text{donc } \begin{aligned} P(X) &= aX^2 - a \\ P(X) &= a(X^2 - 1) \end{aligned}$$

$$\text{cd: } \boxed{\mathcal{S} = \{a(X^2 - 1), a \in \mathbb{R}\}}$$