DS 5 (suites)

mercredi 3 décembre 2025 15:36

Exo n°1 (/3,5)

1) Deux suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes si :
   - l'une est croissante et l'autre décroissante
   - $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n - v_n) = 0$

2) $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, |u_n - L| \leq \varepsilon$

3) a) (u_n) est monotone

   b) (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont monotones et de monotonies contraires

   c) x est un point fixe de f si $f(x) = x$

   La limite, potentielle de (u_n), est parmi les points fixes

Exo n°2 /5

1) $n \to 2n$, $n \to n^2$ et $n \to 2n+1$ sont strictement croissantes.

   Donc ce sont des suites extraites de (u_n)

2) a) u_{4n^2} est une suite extraite de u_{2n} car $4n^2 = (2n)^2$ et $n \to n^2$ croissante

   u_{4n^2} est une suite extraite de u_{n^2} car $4n^2 = 4 \times n^2$ et $n \to 4 \times n$ croissante

   Donc (u_{4n^2}) est extraite de u_{2n} et a la même limite que u_{2n}

   (u_{4n^2}) ——— u_{n^2} ——— u_{n^2}

   cl : Par unicité de la limite : $\boxed{(u_{2n}) \text{ et } (u_{n^2}) \text{ ont même limite}}$

   b) $u_{(2n+1)^2}$ est extraite de u_{n^2} car $n \to 2n+1$ croissante

   $u_{(2n+1)^2} = u_{4n^2+4n+1}$ extraite de u_{2n+1} car $n \to n^2$ croissante

   Donc $\boxed{u_{n^2} \text{ et } u_{2n+1} \text{ ont même limite}}$

   c) cl : (u_{2n}) et (u_{2n+1}) ont la même limite

   Donc $\boxed{(u_n) \text{ CV}}$

Exo n°3 /3,5

$w_{n+1} = f(w_n)$ avec $f(x) = 3x+2$

- Pts fixes : $f(x) = x \iff 3x + 2 = x$ donc $x = -1$
- Suite auxiliaire : Soit $v_n = w_n + 1$

  $v_{n+1} = w_{n+1} + 1 = 3w_n + 3 = 3(w_n + 1) = 3v_n$

  $v_n = v_0 3^n$ avec $v_0 = w_0 + 1 = 3$ donc $v_n = 3^{n+1}$
- cl : $\boxed{w_n = v_n - 1 = 3^{n+1} - 1}$

Pb

1) f est dérivable, $f_n'(x) = nx^{n-1} + 18x$

x	0		u_n		$+\infty$
$f_n'(x)$		$+$			
f_n	-4	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

f_n continue sur $[0, +\infty[$, strictement croissante

$f_n(0) = -4$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) = +\infty$

Par le corollaire du TVI, $\boxed{\exists!\, u_n \in]0; +\infty[\text{ tq } f_n(u_n) = 0}$

2) $f_1(x) = 9x^2 + x - 4$.

   $\Delta = 1 - 4 \times (-36) = 145$, $x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{145}}{18}$ donc $\boxed{u_1 = \dfrac{\sqrt{145} - 1}{18}}$

   $f_2(x) = 10x^2 - 4$.

   $x = \pm\sqrt{\dfrac{4}{10}}$, donc $\boxed{u_2 = \sqrt{\dfrac{2}{5}}}$

3) $f_n(0) = -4$ et $f_n\left(\frac{2}{3}\right) = \left(\frac{2}{3}\right)^n + 9 \times \frac{4}{9} - 4 = \left(\frac{2}{3}\right)^n > 0$

   Donc $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 < u_n < \frac{2}{3}}$

4) $f_{n+1}(x) = x \times x^n + 9x^2 - 4$. or $x \times x^n < x^n$ car $x \in]0;1[$

   Donc $\underbrace{x \times x^n + 9x^2 - 4}_{} < x^n + 9x^2 - 4$

   $\boxed{f_{n+1}(x) < f_n(x)}$

5) $\underbrace{f_{n+1}(u_{n+1})}_{=0} < f_n(u_{n+1})$ car $u_{n+1} \in]0,1[$ puisque $u_n \in]0, \frac{2}{3}[$

   Donc $\boxed{0 < f_n(u_{n+1})}$

   $f_n(u_n) = 0$ donc $f_n(u_n) < f_n(u_{n+1})$ or f_n croissante

   donc $u_n < u_{n+1}$

   $\boxed{(u_n) \text{ est croissante}}$

6) (u_n) est croissante et majorée par $\frac{2}{3}$ donc $\boxed{(u_n) \text{ converge}}$

7) $u_n \in]0; \frac{2}{3}[$ donc $\boxed{\lim\limits_{n\to\infty} u_n^n = 0}$

8) On a : $u_n^n + 9u_n^2 - 4 = 0$, on passe à la limite $0 + 9L^2 - 4 = 0$

   Donc $L = \pm\sqrt{\dfrac{4}{9}}$ or $\forall n, u_n \geq 0$ donc $\boxed{L = \sqrt{\dfrac{4}{9}} = \dfrac{2}{3}}$