Chapitre : **Endomorphismes d'un espace euclidien**

Dans tout le chapitre, E désigne un espace euclidien (donc un $\mathbb{R}$ −espace vectoriel de dimension finie)

On note (.|.) le produit scalaire et ‖.‖ la norme associée

I. Isométries vectorielles

1) Définition
Soit u un endomorphisme de E, on dit que u est une isométrie vectorielle si u conserve la norme.
Ainsi : $\forall \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{E}, \|\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})\| = \|\boldsymbol{x}\|$

2) Remarque
Toute isométrie vectorielle de E est un automorphisme de E.

Démonstration :
Si $u(x) = 0$ *alors* $\|u(x)\| = 0$ *donc* $\|x\| = 0$ *donc x=0 et u est injective, donc bijective car E est de dimension finie !*

3) Vocabulaire
Une isométrie vectorielle est également appelée **automorphisme orthogonal**.
On appelle ainsi groupe orthogonal O(E) l'ensemble des isométries vectorielles.

4) Proposition
Un endomorphisme de E est une isométrie vectorielle si et seulement s'il conserve le produit scalaire
Ainsi u$\in O(E) \Leftrightarrow \forall (x,y) \in E^2, \big(u(x)\big|u(y)\big) = (x|y)$

Démonstration
Si $\forall (x,y) \in E^2, \big(u(x)\big|u(y)\big) = (x|y)$*, alors pour y=x :* $\big(u(x)\big|u(x)\big) = (x|x)$
Soit $\|u(x)\|^2 = \|x\|^2$ *et* $\|u(x)\| = \|x\|$ *donc u*$\in O(E)$

Réciproquement :
Si u$\in O(E)$*, par les identités de polarisation :* $\big(u(x)\big|u(y)\big) = \frac{1}{4}(\|u(x)+u(y)\|^2 - \|u(x)-u(y)\|^2)$
Donc $\big(u(x)\big|u(y)\big) = (x|y)$ *(par linéarité de u)*

5) Proposition
Soit B une base orthonormée de E.
Un endomorphisme de E est une isométrie vectorielle si et seulement si l'image de B par u est une base orthonormée.

Démonstration : Soit B=(e_1*,…,*e_n*) une bon de E*
Si u$\in O(E)$*, pour tout i,j de* $[\![1,n]\!]$, $\big(u(e_i)\big|u(e_j)\big) = (e_i|e_j) = 0$ *pour* $i \neq j$ *et =1 sinon donc (u(*e_1*),…,u(*e_n*)) une bon de E*
Réciproquement
On suppose que l'image de B par u est une bon
On a $\|u(x)\|^2 = \|u(\sum_{i=1}^n x_i e_i)\|^2 = \|\sum_{i=1}^n x_i u(e_i)\|^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 = \|x\|^2$
D'où $\|u(x)\| = \|x\|$ *donc u*$\in O(E)$

6) Proposition
L'ensemble O(E) est stable par composition et par passage à l'inverse.

Démonstration :
Soient (u,v) $\in O(E)$
Alors $\forall x \in E, \|uov(x)\| = \|u(v(x))\| = \|v(x)\| = \|x\|$

Alors $\forall x \in E, \|u^{-1}(x)\| = \|u(u^{-1}(x))\| = \|x\|$

7) Proposition
Soit u$\in O(E)$, si F est un sous-espace vectoriel de E stable par u, alors $F^{\perp}$ est également stable par u.

Démonstration :
Soit y$\in F^{\perp}$*, est ce que u(y)*$\in F^{\perp}$ *? en d'autres termes, est ce que* $\forall x \in F, (x|u(y))$*=0 ?*
Comme u$\in O(E)$*, alors* $u^{-1} \in O(E)$ $(x|u(y))$*=*$(u^{-1}(x)|y)$ *or* $u^{-1}(x) \in F$ *et y*$\in F^{\perp}$
donc $(x|u(y))$*=*$(u^{-1}(x)|y) = 0$

8) Symétries orthogonales
   a) Définition
   Soit F un sous-espace vectoriel de E.
   On appelle symétrie orthogonale par rapport à F la symétrie par rapport à F et parallèlement à $F^{\perp}$.

   Cette symétrie « s »est caractérisée par : $\mathrm{Ker}(s-\mathrm{Id}_E) = F$, et $\mathrm{Ker}(s+\mathrm{Id}_E) = F^{\perp}$

   b) Proposition
   Toute symétrie orthogonale est une isométrie vectorielle.

   Démonstration :
   Pour tout x$\in E, \exists(x_1, x_2) \in F \times F^{\perp}$ *tel que :* $x=x_1 + x_2$
   On a $s(x) = x_1 - x_2$
   Et : $\|s(x)\|^2 = \|x_1\|^2 + \|x_2\|^2 = \|x\|^2$

   c) Terminologie
   On appelle réflexion toute symétrie orthogonale par rapport à un hyperplan de E.

II. <u>Formes quadratiques</u>

1) Rappels
   On appelle **forme bilinéaire** sur E toute application φ de E×E dans $\mathbb{R}$
   Telle que :
   Pour tout y de E, l'application x→ φ(x,y) soit linéaire.
   Pour tout x de E, l'application y→ φ(x,y) soit linéaire.

   On appelle forme **bilinéaire symétrique** sur E, toute forme bilinéaire φ,
   $\forall(x,y) \in E^2, \varphi(x,y) = \varphi(y,x)$

Etant donné une forme bilinéaire φ sur E, on dit que :
La forme $\boldsymbol{\varphi}$ est positive si $\forall \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{E}, \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}) \geq \boldsymbol{0}$
La forme $\boldsymbol{\varphi}$ est définie si $\forall \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{E}, \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0} \Rightarrow \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$

2) Définition
Soit E un espace vectoriel sur un corps K, et Q une fonction de E dans K.
On dit que **Q est une forme quadratique sur E** s'il existe f:E×E→K, une forme bilinéaire symétrique telle que, pour chaque x de E, on ait Q(x)=f(x,x).

3) Polarisation
On dispose de l'identité de polarisation suivante :$f(x,y)=\frac{1}{4}(Q(x+y)-Q(x-y))$.
Ainsi, à une forme quadratique Q correspond une unique forme bilinéaire symétrique f telle que Q(x)=f(x,x).
f s'appelle la forme polaire de Q.

Exemple :
Soit : $Q(x,y,z)=x^2-3yz$, montrer que Q est une forme quadratique sur $\mathbb{R}^3$ (on précisera la forme polaire correspondante…)

Soit u(x,y,z) et v(x',y',z') deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$
On a donc $Q(u)= x^2-3yz$
$Q(u+v)=Q(x+x',y+y',z+z')=(x+x')^2-3(y+y')(z+z')=x^2+x'^2+2xx'-3(yz+y'z+yz'+y'z')$
$Q(u-v)= Q(x-x',y-y',z-z')=(x-x')^2-3(y-y')(z-z')=x^2+x'^2-2xx'-3(yz-y'z-yz'+y'z')$

On pose $f(u,v)= \frac{1}{4}(Q(u+v)-Q(u-v))= \frac{1}{4}(x^2+x'^2+2xx'-3(yz+y'z+yz'+y'z')- x^2-x'^2+2xx'+3(yz-y'z-yz'+y'z') = \frac{1}{4}(4xx'-6y'z-6yz')= xx'- \frac{3}{2}y'z- \frac{3}{2}yz'$

Il reste à vérifier que $f(u,v)= xx'- \frac{3}{2}y'z- \frac{3}{2}yz'$ est bilinéaire et symétrique…

On peut remarquer le « dédoublement » entre $xx'-3\frac{y'z+yz'}{2}$ et x^2-3yz

4) Vocabulaire
Une forme quadratique Q est dite positive (resp. définie) si sa forme polaire est positive (resp. définie).

III. Matrices orthogonales

1) Définition
Soit A∈ $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on dit que A est une matrice orthogonale si $A^T A = I_n$

Notation : On note $O_n(\mathbb{R})$ leur ensemble.

2) Proposition
Soit A∈ $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on note $C_1,\dots, C_n$ ses colonnes et $L_1,\dots,L_n$ ses lignes.
La matrice A est orthogonale si et seulement si elle vérifie l'une des 3 propriétés suivantes (équivalentes) :

(i) A$\in GL_n(\mathbb{R})$, et A^T =A-1

(ii) La famille (C_1,…, C_n) est une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$

(iii) La famille (L_1,…,L_n) est une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$

Démonstration

Le (i) repose sur la définition, nous démontrons le (ii) (le (iii) s'obtient de façon équivalente)

A$\in GL_n(\mathbb{R})$, *et* $A^T = A^{-1}$ *; ainsi* $A^T A = I_n$, *donc* $(A^T A)_{ij} = \delta_{ij}$, $\forall(i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \sum_{k=1}^{n} a_{k,i}a_{k,j} = \delta_{ij}$ *soit* $(C_i/C_j)=\delta_{ij}$

Exemple :

Soit A $= \begin{pmatrix} 1 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$, B $= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ et C $= \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$, préciser quelles sont les matrices orthogonales.

Réponses : C

3) Proposition
Soit B une base <u>orthonormée</u> de E.
Un endomorphisme u de E est une isométrie vectorielle si et seulement si la matrice de u dans B est orthogonale.

Démonstration :
Soit B=(e_1,…,e_n), u est une isométrie vectorielle ssi (u(e_1),…,u(e_n)) est une bon
Or $\forall(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, *(u($e_i$)/u($e_j$))=*$C_i^T C_j=\delta_{ij}$

Remarque :
Le déterminant d'une isométrie vectorielle vaut donc ± 1 (en effet celui d'une matrice orthogonale vaut ± 1, en effet $A^T A = I_n$, donc $\det(A^T A) = 1$ et $\det(A^T) = \det(A)$ …)

4) Proposition
Soit B une base orthonormée de E.
Soit B' une base de E.
Alors B' est orthonormée si et seulement si la matrice de passage $P_{B\to B'}$ est orthogonale.

Démonstration :
Soit B=(e_1,…,e_n), B=(e'_1,…,e'_n), et A : $P_{B\to B'}$
Soit (C_1,…,C_n) les colonnes de A
Alors A est orthogonale ssi $A^T = A^{-1}$ *ssi* $(C_i/C_j)=\delta_{ij}$

5) Définition
Soit A$\in O_n(\mathbb{R})$
A est dite directe ou positive si det(A)=+1, on note $SO_n(\mathbb{R})$ leur ensemble
A est dite indirecte ou négative si det(A)=-1

Exemple : $I_n \in SO_n(\mathbb{R})$

6) Terminologie
L'ensemble des isométries vectorielles directes de E est appelé groupe spécial orthogonal de E, et est noté SO(E)

7) Proposition
Si u et v sont dans SO(E) alors $v\circ u\circ v^{-1}$ est dans SO(E)

Démonstration :
On sait déjà que $v\circ u\circ v^{-1} \in O(E)$, et $\det(v\circ u\circ v^{-1})=\det(u) = +1$

8) Espace vectoriel euclidien orienté
Soit B et B' deux bases orthonormées de E.
On dit que B et B' sont de même sens si la matrice de passage $P_{B\to B'}$ est dans $SO_n(\mathbb{R})$ avec n=dim(E)

9) Orientation d'un espace
On dit que l'on oriente l'espace E lorsque l'on choisit une base orthonormée B_0 et qu'on la décrète directe.
Une base orthonormée sera dite directe si elle est de même sens que B_0

10) Corollaire
Soit B et B' deux bases orthonormées directes de E.
On a alors $\det_B = \det_{B'}$
En d'autres termes : $\forall (u_1, \dots, u_n) \in E^n$, $\det_B (u_1, \dots, u_n) = \det_{B'}(u_1, \dots, u_n)$

Démonstration :
Comme B et B' sont deux bases orthonormées directes de E alors $P_{B\to B'}$ est dans $SO_n(\mathbb{R})$, donc $\det Mat_B(B')=+1$.
Or : $\det_{B'}=\det_{B'}(B)\times \det_B$ donc $\det_B = \det_{B'}$

11) Description de SO(E) **avec E de dimension 2**
Une matrice M$\in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$:
-appartient à $SO_2(\mathbb{R})$ si et seulement si elle est de la forme : $\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$, avec $\theta \in \mathbb{R}$

-appartient à $O_2(\mathbb{R}) \setminus SO_2(\mathbb{R})$ si et seulement si elle est de la forme :
$\begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix}$, avec $\theta \in \mathbb{R}$

Terminologie : On appelle matrice de rotation d'angle θ la matrice
$\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$, avec $\theta \in \mathbb{R}$, cette matrice sera notée $R(\theta)$ dans la suite.

Démonstration :
Soit M∈ $O_2(\mathbb{R})$, alors la famille (C_1 ;C_2) des colonnes de M est une bon de $\mathbb{R}^2$
C_1 est de norme 1, donc $\exists\ \theta \in \mathbb{R}$*, tel que C_1=*$\begin{pmatrix} cos\ (\theta) \\ sin\ (\theta) \end{pmatrix}$
Comme C_2 est orthogonale à C_1 et de norme 1 alors C_2=$\begin{pmatrix} sin\ (\theta) \\ -cos\ (\theta) \end{pmatrix}$ *ou* $\begin{pmatrix} -sin\ (\theta) \\ cos\ (\theta) \end{pmatrix}$
Ainsi M est soit $\begin{pmatrix} cos\ (\theta) & sin\ (\theta) \\ sin(\theta) & -cos\ (\theta) \end{pmatrix}$ *de déterminant -1*
Soit $\begin{pmatrix} cos\ (\theta) & -sin\ (\theta) \\ sin(\theta) & cos\ (\theta) \end{pmatrix}$ *de déterminant 1*

12) Proposition
Pour tout $(\theta_1, \theta_2) \in \mathbb{R}^2$, on a $\mathrm{R}(\theta_1)\mathrm{R}(\theta_2) = \mathrm{R}(\theta_1+\theta_2) = \mathrm{R}(\theta_2)\ \mathrm{R}(\theta_1)$

Remarques :
On constate donc que deux éléments de $SO_2(\mathbb{R})$ commutent.
Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $\mathrm{R}(\theta)^{-1} = \mathrm{R}(-\theta)$

Démonstration :
Il s'agit d'utiliser les formules de duplication du cosinus et du sinus.

13) Proposition
Soit B une base orthonormée directe de E, et u un endomorphisme de E.
On a u∈ $SO_2(\mathbb{R})$ si et seulement s'il existe $\theta \in \mathbb{R}$, $M_B(u) = \begin{pmatrix} \cos\ (\theta) & -\sin\ (\theta) \\ \sin(\theta) & \cos\ (\theta) \end{pmatrix}$

Remarque : Le réel θ unique à 2π près ne dépend pas de la base orthonormée directe B.

Démonstration : Conséquence du 11)

14) Angle orienté
a) Proposition
Soit x et y deux vecteurs unitaires de E, il existe une unique rotation r∈ SO(E)
Telle que r(x)=y

Démonstration :
<u>Pour l'existence :</u>
Comme x est unitaire, on peut compléter afin d'obtenir une bon de E
De même, pour y
Ainsi : (x,e_1) et (y,e_2) sont deux bon de E
L'unique endomorphisme qui renvoie x sur y est donc dans SO(E).
<u>Pour l'unicité :</u>
Soit r de SO(E) tel que r(x)=y
Soit θ l'angle de la rotation
Soit (a,b)∈ $\mathbb{R}^2$ *tel que y=ax+be_2*
Comme la base est orthonormée, r=R(θ), donc $cos(\theta) = a$ *et* $sin(\theta) = b$ *ce qui détermine θ à 2π près.*

b) Définition
Soit x et y deux vecteurs non nuls du plan E.
On appelle mesure orienté des vecteurs x et y, et on note (x,y) toute mesure de l'angle de la rotation r telle que : $r(\frac{x}{\|x\|}) = \frac{y}{\|y\|}$

c) Relation de Chasles
Soit (x,y,z) $\in E^3$, trois vecteurs non nuls, alors : (x,z)=(x,y)+(y,z) $[2\pi]$

Démonstration :
Soit u la rotation qui envoie $\frac{x}{\|x\|}$ sur $\frac{y}{\|y\|}$ et v la rotation qui envoie $\frac{y}{\|y\|}$ sur $\frac{z}{\|z\|}$
Alors uov est une rotation qui envoie $\frac{x}{\|x\|}$ sur $\frac{z}{\|z\|}$
Or si u=R(θ) et v=R(θ') alors uov=R($\theta + \theta'$)

15) Description de O(E)\SO(E)
Soit B=(e_1,e_2) une base orthonormée de E
Soit u un endomorphisme de E.
On a : u$\in$ O(E)\SO(E) si et seulement s'il existe $\theta \in \mathbb{R}, M_B(\text{u}) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix}$

L'endomorphisme u est alors la réflexion par rapport à la droite vectorielle Vect(v_θ) avec $v_\theta = \cos(\frac{\theta}{2})e_1 + \sin(\frac{\theta}{2})e_2$

Démonstration :
$Mat_B(u) = \begin{pmatrix} cos(\theta) & sin(\theta) \\ sin(\theta) & -cos(\theta) \end{pmatrix}$
Son polynôme caractéristique : X^2-1 = (X-1)(X+1)
L'endomorphisme u est diagonalisable
E = Ker(u-Id_E)$\oplus$Ker(u+Id_E)
On peut donc affirmer que u est une symétrie.
Après calculs, les vecteurs propres associés aux valeurs propres 1 et -1 sont :
$V_1=\begin{pmatrix} cos(\frac{\theta}{2}) \\ sin(\frac{\theta}{2}) \end{pmatrix}$ *et* $V_{-1}=\begin{pmatrix} -sin(\frac{\theta}{2}) \\ cos(\frac{\theta}{2}) \end{pmatrix}$
Soit : $v_\theta = cos(\frac{\theta}{2})e_1 + sin(\frac{\theta}{2})e_2$ *et* $w_\theta = -sin(\frac{\theta}{2})e_1 + cos(\frac{\theta}{2})e_2$
Comme les vecteurs sont orthogonaux, on en déduit que u est la réflexion par rapport à la droite vectorielle vect(v_θ).

16) Classification des isométries en dimension 3
E désigne à présent un espace vectoriel orienté de dimension 3.
Soit u une isométrie de E, il y a donc deux possibilités : det(u)=$\pm$1

a) Si det(u)=1
Géométriquement u est une rotation, on cherche alors l'ensemble des vecteurs invariants par u, c'est-à-dire le sous espace propre E_1(u) associé à la valeur propre 1, il y a alors deux possibilités :
-soit dim(E_1(u))=3 alors u est l'identité de E
-soit dim(E_1(u))=1 alors E_1 correspond à une droite D appelé axe de rotation. Le plan P=$D^\perp$ est stable par u.

En considérant un vecteur unitaire e_1 de D et une bon (e_2,e_3) de P telle que (e_1, e_2,e_3) soit une base orthonormée directe de E alors la matrice de u dans cette base est de la forme : $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$

La conservation de la trace donnant $1+2\cos(\theta)$ permet de déterminer $\cos(\theta)$ et donc de déterminer $\pm\theta$

L'exemple suivant donne la façon de déterminer θ, il nécessite de savoir calculer le produit vectoriel de deux vecteurs de l'espace. Ce calcul est simple mais n'est plus abordé dans le secondaire.

Lemme : Calcul du produit vectoriel dans l'espace.

Définition : Le produit vectoriel de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de l'espace, noté $\vec{u} \wedge \vec{v}$, est l'unique vecteur défini par :

(i) $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$ si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires ;

(ii) $\vec{u} \wedge \vec{v} = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\||\sin(\vec{u},\vec{v})|\vec{w}$ avec $\vec{w}$ unitaire, orthogonal à $(\vec{u},\vec{v})$ et $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ forme un trièdre direct

Expression analytique :

Soit $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ une base orthonormée directe.

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de coordonnées respectives (x, y, z) et (x ′, y′, z′).

Alors le vecteur $\vec{u} \wedge \vec{v}$ a pour coordonnées $(yz' - zy', zx' - xz', xy' - yx')$

Etude d'un exemple :

Soit l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ de matrice $A=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

Reconnaître géométriquement cet endomorphisme.

*Montrer que $A \in O_3(\mathbb{R})$

*Montrer que $A \in SO_3(\mathbb{R})$

*Montrer que AU=U correspond à vect(U(1,1,1))

*Avec la trace, montrer que $\theta = \pm\frac{\pi}{3}\,[2\pi]$

*Montrer que $V=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0)$ est unitaire et orthogonal à U

*Montrer que $V \wedge AV = \frac{-1}{2}(1,1,1) = \frac{-\sqrt{3}}{2}\frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}$ donc $\sin(\theta) = \frac{-\sqrt{3}}{2}$

A est la matrice de la rotation d'angle $-\frac{\pi}{3}$

b) Si det(u)=-1

Il existe alors une base orthonormale directe (e_1, e_2,e_3) telle que la matrice de u dans cette base est de la forme : $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$

Si $\theta \equiv 0[2\pi]$, alors u est la symétrie orthogonale par rapport au plan P de base (e_2,e_3).

Si $\theta \equiv \pi[2\pi]$, alors $u=-Id_E$

Sinon, on cherche $E_{-1}(u)$ espace propre associé à la valeur propre -1, soit D la droite correspondante.
La conservation de la trace donne -1+2 cos (θ), ce qui permet de déterminer $\pm\theta$
Et, u est la composée commutative de la rotation d'axe D et d'angle θ avec la réflexion par rapport à P orthogonal à D.
On parle d'antirotation.
Remarque : On peut aussi étudier la matrice par $-I_3$ et se ramener à l'étude d'une rotation

Etude d'un exemple : Montrer que la matrice $A = \frac{-1}{4}\begin{pmatrix} 3 & 1 & \sqrt{6} \\ 1 & 3 & -\sqrt{6} \\ -\sqrt{6} & \sqrt{6} & 2 \end{pmatrix}$ est dans une base orthonormée directe, celle d'une antirotation de l'espace dont on déterminera l'axe et l'angle.
On obtient que -A est une rotation d'axe vect(1,1,0) et d'angle $\frac{2\pi}{3}$
D'où A est l'antirotation d'axe vect(1,1,0) et d'angle $\frac{2\pi}{3}$

IV. Endomorphismes autoadjoints, matrices symétriques

1) Définition
Un endomorphisme u de E est dit autoadjoint, ou symétrique, s'il vérifie :
$\forall(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \in \boldsymbol{E}^2, (\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})|\boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x}|\mathbf{u}(\mathbf{y}))$
On note S(E) l'ensemble des endomorphismes autoadjoints de E.

2) Proposition
L'ensemble des endomorphismes autoadjoints de E est un sous-groupe de L(E)

3) Proposition
Soit p une projection de E.
Alors p est une projection orthogonale si et seulement si p est un endomorphisme autoadjoint.

Démonstration :
Soit F et G les deux sous-espaces supplémentaires dans E tels que p soit la projection sur F parallèlement à G
Ainsi : $\forall x \in E, \exists(x_1, x_2 \in F \times G), x = x_1 + x_2$ *et* $p(x) = x_1$

Supposons que p soit une projection orthogonale
Soit (x,y) $\in E^2, \exists(x_1, x_2 \in F \times G), x = x_1 + x_2$ *et* $\exists(y_1, y_2 \in F \times G), y = y_1 + y_2$
(p(x)|y) = $(x_1|y_1)$ *et (x|p(y)) =* $(x_1|y_1)$
Donc (p(x)|y) = (x|p(y)) et p est autoadjoint

Réciproquement :
Si p est autoadjoint, $\forall(x,y) \in F \times G$ *(p(x)|y) = (x|p(y)) donne (x|y)=0 donc x et y orthogonaux.*

4) Lien avec les matrices
<u>**Soit B une base orthonormée de E.**</u>
Un endomorphisme u de E est autoadjoint si et seulement si sa matrice dans la base B est symétrique.

L'ensemble des matrices symétriques réelles de taille n est notée $S_n(\mathbb{R})$

On a : dim S(E) $= \frac{n(n+1)}{2}$ avec n=dim(E).

Démonstration:
Soit B=(e_1,…,e_n) et A=($a_{i,j}$) base de u dans B.
Comme B est orthonormée, $a_{i,j}$=($u(e_i)$,e_j) =($u(e_j)$,e_i)=$a_{j,i}$

Réciproquement
Si A symétrique, si x=$\sum_{k=1}^{n} x_k e_k$ et y==$\sum_{k=1}^{n} y_k e_k$
Comme A est symétrique, ($u(e_i)$,e_j) =($u(e_j)$,e_i), d'où (u(x)|y) = (x|u(y))
Et u est symétrique.

Remarque :
La matrice dans une base orthonormée de E d'une symétrie orthogonale est symétrique.

5) Réduction des endomorphismes autoadjoints.
   a) Proposition
   Soit u un endomorphisme autoadjoint de E
   Si F est un sous-espace vectoriel stable par u, alors $F^{\perp}$ est également stable par u.

   Démonstration :
   Si x∈ $F^{\perp}$, soit y∈ F, (u(x),y) = (x|u(y))=0 …

   b) Proposition
   Les sous-espaces propres d'un endomorphisme autoadjoint sont deux à deux orthogonaux.

   c) Théorème dit théorème spectral (théorème admis)
   Tout endomorphisme autoadjoint d'un espace euclidien admet une base orthonormée de vecteurs propres.

   Remarque : Donc, en clair, si une matrice est symétrique alors elle est diagonalisable ?
   Oui et non, cela dépend de quoi on parle…
   Soit A = $\begin{pmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, alors $\chi_A(X) = X^2$ donc le spectre se résume à {0} ainsi, si A était diagonalisable alors A serait la matrice nulle ! Donc A n'est pas diagonalisable, tout en étant symétrique.
   Pourtant, si la matrice est symétrique alors elle doit représenter un endomorphisme autoadjoint.
   Où est l'erreur ?

En fait, une matrice symétrique représente un autoadjoint lorsqu'on travaille sur $\mathbb{R}$ et non sur $\mathbb{C}$. Le théorème spectral possède une transcription complexe mais avec une définition du produit scalaire différente, il s'agit non plus d'espace Euclidien mais d'espace Hermitien, et la symétrie est remplacée par la transymétrie (la matrice doit être égale au conjugué de la transposée)

d) Corollaire
Une matrice A$\in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, est symétrique si et seulement s'il existe P$\in O_n(\mathbb{R})$ et D$\in D_n(\mathbb{R})$ telle que A = PDP^{-1} = PD^{t}P

6) Endomorphismes autoadjoints (définis) positifs.
a) Définition
Soit u∈S(E)
On dit que u est autoadjoint positif si $\forall \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{E}, (\boldsymbol{x}|\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})) \geq \mathbf{0}$
On dit que u est autoadjoint défini positif si $\forall \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{E} \setminus \{\mathbf{0}\}, \left(\boldsymbol{x}\middle|\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})\right) > \mathbf{0}$, on note S^{++}(E) leur ensemble.
b) Proposition
Soit u∈S(E)
On a : u∈ S^{+}(E)$\Leftrightarrow Sp(u) \subset \mathbb{R}^{+}$
On a : u∈ S^{++}(E)$\Leftrightarrow Sp(u) \subset \mathbb{R}^{+*}$

Démonstration:
On calcule (x|u(x)) en décomposant x dans une bon de vecteurs propres.

c) Définition
Soit A$\in S_n(\mathbb{R})$,
A est symétrique positive si : $\forall x \in \mathbb{R}^n$, (x|Ax)≥0, on note ${S_n}^{+}(\mathbb{R})$ leur ensemble
A est symétrique définie positive si : $\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus\{0\}$, (x|Ax)>0, on note ${S_n}^{++}(\mathbb{R})$ leur ensemble.

d) Proposition
Soit A$\in S_n(\mathbb{R})$,
On a : A$\in {S_n}^{+}(\mathbb{R}) \Leftrightarrow Sp(A) \subset \mathbb{R}^{+}$
On a : A$\in {S_n}^{++}(\mathbb{R})$)$\Leftrightarrow Sp(A) \subset \mathbb{R}^{+*}$

Démonstration: En exercice!