

Exo 10

Une astuce à connaître : $(x-y, x+y) = (x, x) - (y, y) + (x, y) - (y, x)$
 $= \|x\|^2 - \|y\|^2$

Ainsi, si on prend x et y de normes 1

On a : $x-y$ et $x+y$ orthogonaux !

Pour $x \neq 0$, on doit donc montrer que $\forall x \in E^x$, $\frac{1}{\|x\|} \|f(x)\| = 1$.

Plus précisément : $\exists \lambda \in \mathbb{R} \text{ tq } \forall x \in E^x, \frac{1}{\|x\|} \|f(x)\| = \lambda$.

Rq n°1 : $\frac{\|f(x)\|}{\|x\|} \geq 0$ donc $\lambda \geq 0$

Rq n°2 : Si λ existe, on aura : $\forall x \in E^x, \|f(x)\| = \lambda \|x\|$
 et cette égalité restera vraie par $x=0$ car $f(0)=0$

En clair, on doit montrer que $x \mapsto \frac{1}{\|x\|} \|f(x)\|$ est cste

cst : $\forall (x, y) \in E^{x \neq 0}, \frac{\|f(x)\|}{\|x\|} = \frac{\|f(y)\|}{\|y\|}$

or $|\alpha| \|f(x)\| = \|f(\alpha x)\|$ donc $\frac{1}{\|x\|} \|f(x)\| = \left\| \frac{1}{\|x\|} f(x) \right\|$

et $\frac{1}{\|x\|} f(x) = f\left(\frac{x}{\|x\|}\right)$ car f linéaire

d'où : $\frac{1}{\|x\|} \|f(x)\| = \left\| f\left(\frac{x}{\|x\|}\right) \right\|$ et $\frac{1}{\|y\|} \|f(y)\| = \left\| f\left(\frac{y}{\|y\|}\right) \right\|$

mais $\frac{x}{\|x\|}$ et $\frac{y}{\|y\|}$ sont de norme 1.

Donc $\left(\frac{x}{\|x\|} + \frac{y}{\|y\|}\right) \perp \left(\frac{x}{\|x\|} - \frac{y}{\|y\|}\right)$.

Donc $f\left(\frac{x}{\|x\|} + \frac{y}{\|y\|}\right) \perp f\left(\frac{x}{\|x\|} - \frac{y}{\|y\|}\right)$

et $f\left(\frac{x}{\|x\|} + \frac{y}{\|y\|}\right) = \frac{1}{\|x\|} f(x) + \frac{1}{\|y\|} f(y)$ et $f\left(\frac{x}{\|x\|} - \frac{y}{\|y\|}\right) = \frac{1}{\|x\|} f(x) - \frac{1}{\|y\|} f(y)$

$\left(\frac{1}{\|x\|} f(x) + \frac{1}{\|y\|} f(y), \frac{1}{\|x\|} f(x) - \frac{1}{\|y\|} f(y)\right) = 0$

$\frac{1}{\|x\|^2} (f(x), f(x)) - \frac{1}{\|x\|} \times \frac{1}{\|y\|} (f(x), f(y)) + \frac{1}{\|y\|} \times \frac{1}{\|x\|} (f(y), f(x)) - \frac{1}{\|y\|^2} (f(y), f(y)) = 0$

$\frac{1}{\|x\|^2} \|f(x)\|^2 = \frac{1}{\|y\|^2} \|f(y)\|^2$

Donc $\forall (x, y) \in E^x, \left(\frac{\|f(x)\|}{\|x\|}\right)^2 = \left(\frac{\|f(y)\|}{\|y\|}\right)^2$ et $\frac{\|f(x)\|}{\|x\|} = \frac{\|f(y)\|}{\|y\|}$

cst : $\exists \lambda \in \mathbb{R}^+ / \forall x \in E, \|f(x)\| = \lambda \|x\|$

Exo 20

1) Si h est continue alors h possède une primitive sur $[a, b]$

Soit H cette primitive

- Si $h \geq 0$, comme $H'(x) = h(x)$ alors H est croissante

et $\int_a^b h(x) dx = H(b) - H(a)$

mais si $\int_a^b h(x) dx = 0$ alors $H(b) - H(a) = 0$ donc $H(b) = H(a)$

or H est croissante donc H est constante sur $[a, b]$

et $H'(x) = 0$ sur $[a, b]$

Finalement : $h(x) = 0$ sur $[a, b]$

2) Il s'agit d'un ps étudié dans le cours !

3) Rappel : $|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|$

$\int_0^1 \sqrt{x} e^{-x} dx \leq \sqrt{\int_0^1 \sqrt{x} \sqrt{x} dx} \sqrt{\int_0^1 e^{-2x} dx}$ car $(f, g) = \int_0^1 f(x)g(x) dx$

or $\int_0^1 \sqrt{x} \sqrt{x} dx = \int_0^1 x dx = \frac{1}{2} [x^2]_0^1 = \frac{1}{2}$

$\int_0^1 e^{-2x} dx = \int_0^1 e^{-2x} dx = -\frac{1}{2} [e^{-2x}]_0^1 = \frac{-e^{-2} + 1}{2}$

Donc $\int_0^1 \sqrt{x} e^{-x} dx \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{1-e^{-2}}}{\sqrt{2}}$

$\int_0^1 \sqrt{x} e^{-x} dx \leq \frac{\sqrt{1-e^{-2}}}{2}$