Séance 7 janvier

mercredi 7 janvier 2026 10:38

Exo n°1

Soit $(P,Q) \in \mathbb{R}_n[X]^2$

Rappel : Il est judicieux de vérifier l'existence des quantités mises en jeu (surtout pour des intégrales ou des sommes infinies)

Sinon : Etudier la symétrie avant, permet de ramener la bilinéarité à la linéarité !

× $\sum_{k=0}^{n} P(k)Q(k) = \sum_{k=0}^{n} Q(k)P(k)$ donc $\varphi(P,Q) = \varphi(Q,P)$ et φ symétrique

× Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, $(P_1, P_2, Q) \in \mathbb{R}_n[X]^3$

$\sum_{k=0}^{n} (\lambda P_1 + P_2)(k)Q(k) = \sum_{k=0}^{n} (\lambda P_1(k) + P_2(k))Q(k) = \lambda \sum_{k=0}^{n} P_1(k)Q(k) + \sum_{k=0}^{n} P_2(k)Q(k)$

D'où : $\varphi(\lambda P_1 + P_2, Q) = \lambda\varphi(P_1, Q) + \varphi(P_2, Q)$

Donc linéaire à gauche et bilinéaire par symétrie !

× $\sum_{k=0}^{n} P(k)^2 \geq 0$ donc $\varphi(P,P) \geq 0$ et φ positive

× $\sum_{k=0}^{n} P(k)^2 = 0 \iff \forall k \in [\![0,n]\!],\ P(k)^2 = 0$ et $P(k) = 0$

Donc P possède $n+1$ racines or $\deg P \leq n$ donc $P = 0$

φ est définie

cl : $\boxed{\varphi \text{ définit un produit scalaire sur } \mathbb{R}_n[X]}$

Exo n°2

$t \mapsto f(t)g(t)(1-t^2)$ est une fonction continue sur $[-1;1]$ donc l'intégrale est parfaitement définie

⚠ Le fait que l'intégrale soit définie ne veut pas dire que la forme est définie au sens de l'axiomatique du produit scalaire !

× $\int_{-1}^{1} f(t)g(t)(1-t^2)\,dt = \int_{-1}^{1} g(t)f(t)(1-t^2)\,dt$ donc $\boxed{\varphi(f,g) = \varphi(g,f)}$

× Par linéarité de l'intégrale : $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\forall (f_1, f_2, g) \in E^2$

$\varphi(\lambda f_1 + f_2, g) = \lambda\varphi(f_1, g) + \varphi(f_2, g)$ donc linéaire à gauche

et par symétrie, linéaire à droite

donc $\boxed{\varphi \text{ bilinéaire}}$

× $\int_{-1}^{1} f^2(t)(1-t^2)\,dt \geq 0$ car sur $[-1,1]$, $f^2(t)(1-t^2) \geq 0$ (et par positivité de l'intégrale…)

Donc $\varphi(f,f) \geq 0$ et $\boxed{\varphi \text{ positive}}$

× $\varphi(f,f) = 0 \iff \int_{-1}^{1} f^2(t)(1-t^2)\,dt = 0$ or $t \mapsto f^2(t)(1-t^2)$ est positive et C^0 sur $[-1,1]$

donc $\forall t \in [-1,1]$, $f^2(t)(1-t^2) = 0$

D'où $\forall t \in]-1,1[$ $f^2(t) = 0$ et $f(t) = 0$

Par continuité, $\lim_{t \to -1} f(t) = \lim_{t \to 1} f(t) = 0$

d'où $f = 0$

⚠ On n'a pas directement $f(t) = 0$ sur $[-1;1]$

Exo n°7

$\|u_1\| = \|u_2\| = \dots = \|u_q\| = 1$ et $\forall x \in E$, $\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{q} (x, u_i)^2$

Mq $(u_1 - u_q)$ est une bon de E

× D'abord, on a bien $\|u_1\| = \dots = \|u_q\| = 1$

× Il reste à mq $\forall (i,j) \in [\![1;q]\!]^2$ avec $i \neq j$, $(u_i, u_j) = 0$

$\|u_j\|^2 = \sum_{i=1}^{q} (u_j, u_i)^2$

$\|u_j\|^2 = (u_j, u_j)^2 + \sum_{\substack{i=1 \\ j \neq i}}^{q} (u_j, u_i)^2$

On sort le terme $(u_j, u_j)^2$ de la somme générale

$\underbrace{\|u_j\|^2}_{1} = \underbrace{\|u_j\|^4}_{1} + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{q} (u_j, u_i)^2$ or $\|u_j\| = 1$

$1 = 1 + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{q} (u_j, u_i)^2$ donc $\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{q} (u_j, u_i)^2 = 0$

Donc $\forall i \in [\![1,q]\!]$, $i \neq j$, $(u_j, u_i)^2 = 0$ et $(u_j, u_i) = 0$

cl : $(u_i, u_j) = \delta_{ij}$

Et $(u_1 — u_q)$ est une bon de E

A-t-on fini ?

NON, on a montré que $(u_i, u_j) = \delta_{ij}$

mais $\operatorname{card}(u_1 - u_q) = q$ et $\dim E = n$

Il n'est pas évident que $q = n$

On pourrait avoir simplement $q < n$

Peut-on avoir un vecteur $x \in E$ et $x \notin \operatorname{Vect}(u_1 - u_q)$?

Supposons : $\exists x \in E$ tq $x \notin \operatorname{Vect}(u_1 - u_q)$

Alors par Gram-Schmidt, on pourrait construire un vecteur y tq y orthogonal à $\operatorname{Vect}(u_1 - u_q)$

càd $y \in (\operatorname{Vect}(u_1 - u_q))^{\perp} = \operatorname{Vect}((u_1 - u_q)^{\perp})$

et ainsi $\forall i \in [\![1,q]\!]$, $(y, u_i) = 0$

mais alors $\|y\|^2 = \sum_{i=1}^{q} (y, u_i)^2 = 0$ donc $y = 0$

Le seul vecteur orthogonal à $\operatorname{Vect}(u_1 - u_q)$ est 0

Donc $E = \operatorname{vect}(u_1 - u_q)$

cl : $\boxed{(u_1 - u_q) \text{ bon de } E}$