Mécanique 3 – Approche énergétique

Au début du 19e siècle, on commence à découvrir de nombreux phénomènes de plus en plus difficiles à expliquer avec les principes de la mécanique de Newton, en particulier la notion de gravitation universelle : électricité, magnétisme, phénomènes thermiques, etc. Si les deux premiers phénomènes peuvent s'expliquer par des forces, les phénomènes thermiques demandent d'autres concepts.

D'autre part, on s'est rendu compte que quelque chose dans la nature se conservait toujours lors d'une transformation (physique, chimique) : l'action mécanique se transforme en « chaleur » (l'appellation est impropre, mais nous y reviendrons dans le cours de thermodynamique), l'électricité peut provoquer des réactions chimiques, etc. Ce « quelque chose » qui se conserve au cours de toute transformation semblait être un concept plus fondamental que le concept de force. Les physiciens du XIXe siècle lui ont donné le nom d'**énergie**. Aujourd'hui, c'est certainement le concept le plus important en physique, celui qui permet d'unifier tous les phénomènes. Pour certains savants, tous les aspects du monde extérieur que nous percevons sont des manifestations différentes de l'énergie.

Dans ce chapitre nous allons nous consacrer à l'énergie mécanique qui présente elle-même différents aspects : énergie cinétique et énergie potentielle.

1. Puissance et travail dans un référentiel

1.1. Puissance d'une force dans un référentiel

En physique, la puissance est l'énergie fournie à un système donné **par unité de temps** (nous définirons le terme énergie rigoureusement par la suite, assimilons la pour l'instant à la notion d'*effort*).

Prenons l'exemple d'un haltérophile. Demandons-lui de soulever un haltère de 50 kg jusqu'à une hauteur de 1 mètre en une seconde. Demandons lui ensuite d'effectuer le même exercice en 5 secondes. On comprend intuitivement que cela requiert une puissance plus faible (même si au final, l'effort total est le même). Si on lui demande enfin de soulever un haltère de 100 kg en une seconde, cela va au contraire lui demander deux fois plus de puissance. En mécanique, la puissance est liée à la force à fournir (ici la force pour vaincre le poids de l'haltère) et la vitesse de l'objet en mouvement.

DEFINITION

La **puissance** d'une force $\vec{F}$ qui s'exerce sur un point matériel de vitesse $\vec{v}_{M/\mathcal{R}}$ dans un référentiel $\mathcal{R}$ est donnée par la relation :

$$\mathcal{P}_{\vec{F}/\mathcal{R}} = \vec{F} \cdot \vec{v}_{M/\mathcal{R}}$$

La puissance s'exprime en Watts (1W = 1 J.s^{-1}) et dépend du référentiel choisi.

Dans le cas de l'haltérophile, la force est **motrice** : il met un haltère en mouvement (plus ou moins vite) ; en d'autres termes, la force qu'il exerce est dans le même sens que la vitesse de l'haltère (vers le haut). Dans ce cas on constate que la puissance $\mathcal{P}_{\vec{F}/\mathcal{R}}$ est **positive**. Cela signifie qu'on **fournit de l'énergie** à l'haltère.

Mais une force peut aussi être **résistante** : par exemple une force de frottement. Dans ce cas la vitesse de l'objet et la force sont de sens opposés et donc la puissance $\mathcal{P}_{\vec{F}/\mathcal{R}}$ est **négative**. Cela signifie qu'on **retire de l'énergie** au système, en d'autres termes c'est lui qui nous fournit de l'énergie : dans le cas du frottement, la manifestation de cette énergie est par exemple l'élévation de température (exemple : lorsqu'on se frotte les mains).

1.2. Travail d'une force dans un référentiel

Nous avons vu que la puissance était une notion instantanée, elle se définit à un instant donné. Le travail d'une force se définit sur une durée donnée, par exemple entre deux instants t et t+dt. Elle peut, ce qui revient au même, être également définie par rapport au déplacement $d\overrightarrow{OM}$ du système étudié pendant cette durée.

DEFINITION

- Le **travail élémentaire** d'une force $\vec{F}$ qui s'exerce entre les instants t et t+dt sur un point matériel M dans un référentiel $\mathcal{R}$ est donné par la relation :

$$\delta W_{\vec{F}/\mathcal{R}} = \vec{F} \cdot d\overrightarrow{OM}$$

Le travail s'exprime en Joules (1 J = 1 N.m) et dépend du référentiel choisi.

Il est également possible d'exprimer le travail en fonction du temps infinitésimal dt :

$$\delta W_{\vec{F}/\mathcal{R}} = \mathcal{P}_{\vec{F}/\mathcal{R}} \cdot dt$$

En effet : $\delta W_{\vec{F}/\mathcal{R}} = \vec{F} \cdot d\overrightarrow{OM} = \vec{F} \cdot \vec{v}_{M/\mathcal{R}} dt = \mathcal{P}_{\vec{F}/\mathcal{R}} \cdot dt$

- Le **travail total** de cette force entre deux instants t_1 (où le système est en M_1) et t_2 (où le système est en M_2) s'écrit donc :

$$\begin{aligned} W_{\vec{F}}^{M_1 \to M_2} &= \int_{M_1}^{M_2} \delta W_{\vec{F}} \\ &= \int_{M_1}^{M_2} \vec{F} \cdot d\overrightarrow{OM} \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{P}_{\vec{F}/\mathcal{R}} \cdot dt \end{aligned}$$

ATTENTION

Il ne faut pas confondre :

- Le symbole dX qui correspond à la notion mathématique de différentielle d'une **fonction** X. La grandeur dX doit être interprétée comme une **petite variation** de la grandeur X.
- Le symbole δX qui n'a pas de signification mathématique : il signifie **l'apport d'une petite quantité** de la grandeur X **qui n'est pas une fonction**.

Le travail élémentaire se note δW et non dW car **le travail n'est pas une fonction**, donc δW n'est pas une différentielle. Le travail à un instant donné ou en un point donné n'a pas de sens : le travail n'a de sens qu'entre deux points ou deux instants. En particulier le travail pour aller d'un point M_1 à un point M_2 **dépend du chemin suivi**.

Cela n'aurait pas de sens d'écrire $\int_{M_1}^{M_2} \delta W = W(M_2) - W(M_1)$!!

2. Théorèmes de la puissance cinétique et de l'énergie cinétique

2.1. Energie cinétique

L'énergie cinétique est une composante de l'énergie mécanique : c'est sa manifestation sous forme de **mouvement** (nous verrons qu'il existe une autre composante de l'énergie mécanique, plus cachée). Un projectile, par exemple, possède d'autant plus d'énergie, c'est-à-dire qu'il fera d'autant plus de dégâts, que sa **masse** et sa **vitesse** seront grandes.

DEFINITION

Soit un point M de masse m se déplaçant à une vitesse $\vec{v}_{M/\mathcal{R}}$ dans un référentiel $\mathcal{R}$. On définit l'**énergie cinétique** du point matériel M comme :

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2$$

Avec $v^2 = \left\|\vec{v}_{M/\mathcal{R}}\right\|^2$

L'énergie cinétique s'exprime en Joules (1J = 1 kg.m^2.s^{-2}).

2.2. Théorème de la puissance cinétique

A VOUS DE JOUER

1. Montrer que la dérivée de l'énergie cinétique s'écrit $\frac{dE_c}{dt} = m\vec{v} \cdot \vec{a}$

2. En se basant sur le PFD, montrer qu'on aboutit à : $\frac{dE_c}{dt} = \mathcal{P}_{\vec{F}tot}$

THEOREME DE LA PUISSANCE CINETIQUE

Soit un point M de masse m se déplaçant à une vitesse $\vec{v}_{M/\mathcal{R}}$ dans un **référentiel galiléen** $\mathcal{R}$ et soumis à un ensemble de forces extérieures dont la résultante est notée $\vec{F}_{tot}$. On a alors :

$$\frac{dE_c}{dt} = \mathcal{P}_{\vec{F}tot}$$

Le théorème de la puissance cinétique constitue une alternative au PFD pour trouver l'**équation du mouvement**. Il permettra dans certains cas de simplifier les calculs ou d'arriver plus vite au résultat voulu.

2.3. Théorème de l'énergie cinétique

A VOUS DE JOUER

Intégrer le théorème de la puissance cinétique entre deux instants t_1 et t_2. En déduire une deuxième version du théorème précédent, appelée théorème de l'énergie cinétique.

THEOREME DE LA PUISSANCE CINETIQUE

Soit un point M de masse m se déplaçant à une vitesse $\vec{v}_{M/\mathcal{R}}$ dans un **référentiel galiléen** $\mathcal{R}$ et soumis à un ensemble de forces extérieures dont la résultante est notée $\vec{F}_{tot}$.

La variation de l'énergie cinétique du point M entre deux instants t_1 et t_2 vaut :

$$\Delta E_c = W_{\vec{F}tot}^{1\to 2}$$

Cette loi sert généralement à obtenir des **relations entre les grandeurs cinétiques** (norme de la vitesse, hauteur, angle...) entre deux instants donnés.

2.4. Retour sur les significations physiques de la puissance et du travail

A VOUS DE JOUER

1. En se basant sur le théorème de l'énergie cinétique, expliquer comment varie l'énergie cinétique lorsque $W_{tot} > 0$, lorsque $W_{tot} < 0$ et enfin lorsque $W_{tot} = 0$.

2. En déduire l'interprétation physique du travail d'une force.

3. En se basant sur le lien entre travail et puissance d'une force, proposer une interprétation physique de la puissance d'une force.

A RETENIR

- Le **travail élémentaire** δW s'interprète comme étant la quantité infinitésimale d'énergie fournie algébriquement au système via la force lors du déplacement infinitésimal.

  → Le système **reçoit** de l'énergie lorsque $\delta W > 0$
  → Le système **perd** de l'énergie lorsque $\delta W < 0$
  → Le système **conserve** une énergie cinétique constante lorsque $\delta W = 0$

  Le travail $W^{1\to2}$ correspond à l'énergie totale fournie algébriquement au système au cours de son déplacement du point M_1 (en t_1) au point M_2 (en t_2).

  Le travail $W^{1\to2}$ dépendant du chemin suivi, l'énergie fournie au système dépend donc de la trajectoire !

- La **puissance** correspond à un débit d'énergie :

$$\mathcal{P} = \frac{\delta W}{dt}$$

  La puissance correspond à la quantité d'énergie fournie algébriquement au système par unité de temps :

  → Le système **reçoit** de l'énergie lorsque $\mathcal{P} > 0$
  → Le système **perd** de l'énergie lorsque $\mathcal{P} < 0$
  → Le système **conserve** une énergie constante lorsque $\mathcal{P} = 0$

3. Energie potentielle et énergie mécanique

3.1. Energie potentielle

L'énergie cinétique n'est en fait qu'une composante de l'énergie mécanique : elle est sa forme la plus manifeste, lorsque le système est en mouvement. Mais il existe une autre forme d'énergie, plus « cachée » : un système peut être au repos et disposer d'un « stock » d'énergie susceptible d'être converti en énergie cinétique.

La voiture sur les montagnes russes est immobile. Cependant, par sa hauteur même, elle possède une certaine capacité à acquérir un mouvement. Les passagers, à ce moment, le comprennent !

La flèche est immobile au moment où l'archer se prépare … cependant l'arc est tendu : cela constitue également une réserve d'énergie !

Cette réserve d'énergie est appelée **énergie potentielle**. Elle peut potentiellement se convertir en énergie cinétique : lorsqu'on lâche les freins de la voiture dans les montagnes russes, ou lorsque l'archer lâche la corde de l'arc. On voit que l'énergie potentielle est associée à une certaine force : force de pesanteur dans le premier cas, force de rappel élastique dans le deuxième. On dit (et on le comprendra plus bas) que la force **dérive d'une énergie potentielle**.

ATTENTION

On ne peut pas associer une énergie potentielle à toutes les forces.
Seules les forces dites conservatives dérivent d'une énergie potentielle.

DEFINITIONS

Une force $\vec{F}$ est dite **conservative** si son travail entre deux points $W_{\vec{F}}^{M_1 \to M_2}$ ne dépend pas du chemin suivi.

Dans ce cas, le travail peut être écrit sous la forme de la variation d'une fonction :

$$W_{\vec{F}}^{M_1 \to M_2} = -\Delta E_{p,F}$$

La fonction $E_{p,F}$ est appelée **énergie potentielle**. On peut également écrire :

$$\delta W_{\vec{F}} = \vec{F} \cdot d\overrightarrow{OM} = -\mathrm{d}E_{p,F}$$

En utilisant les coordonnées cartésiennes, on peut détailler les deux membres de l'égalité précédente :

$$\vec{F} \cdot d\overrightarrow{OM} = F_x dx + F_y dy + F_z dz$$

$$\mathrm{d}E_p = \left(\frac{\partial E_p}{\partial x}\right)_{y,z} dx + \left(\frac{\partial E_p}{\partial y}\right)_{x,z} dy + \left(\frac{\partial E_p}{\partial z}\right)_{x,y} dz$$

Par identification, nous avons donc pour un déplacement élémentaire (dx, dy, dz) :

$$F_x = -\left(\frac{\partial E_p}{\partial x}\right)_{y,z} \; ; \; F_y = -\left(\frac{\partial E_p}{\partial y}\right)_{x,z} \; ; \; F_x = -\left(\frac{\partial E_p}{\partial z}\right)_{x,y}$$

A RETENIR

Dans un problème à un degré de liberté noté x on aura :

$$E_p = E_p(x)$$
$$\vec{F} = F(x) \cdot \vec{u}_x$$

Par conséquent :

$$F(x) = -\frac{dE_p(x)}{dx}$$

On dit alors que la force $\vec{F}$ **dérive** de l'énergie potentielle $E_{p,F}$.

L'énergie potentielle n'a de sens que par sa **variation** : elle est donc systématiquement déterminée à une constante près, qui peut être fixée arbitrairement. Cette constante est une référence qui n'a pas de signification physique.

3.2. Energie mécanique – théorème de l'énergie mécanique

Nous disposons maintenant des deux composantes de l'énergie mécanique : l'énergie cinétique et l'énergie potentielle.

DEFINITION

L'**énergie mécanique** E_m d'un point matériel M soumis à un ensemble de forces $\vec{F_i}$ est la somme de son énergie cinétique et des énergies potentielles

$$E_m = E_c + E_p$$

A VOUS DE JOUER

Soit un point matériel soumis à des forces conservatives et non conservatives.

1. Rappeler le théorème de la puissance cinétique.

2. Comment peut-on décomposer la de puissance de l'ensemble des forces ?

3. En déduire une équation vérifiée par l'énergie mécanique du système.

4. Intégrer cette dernière équation entre deux instants t1 et t2 pour obtenir une deuxième expression du théorème.

THEOREME DE L'ENERGIE MECANIQUE

Soit un point matériel M de masse m et de vitesse $\vec{v}_{M/\mathcal{R}}$ dans un **référentiel galiléen** $\mathcal{R}$. Il est soumis à un ensemble de forces **conservatives** $\vec{F}^C$ et **non conservatives** $\vec{F}^{NC}$dont la résultante est notée $\vec{F}_{tot}$. Alors l'énergie mécanique de M obéit à :

$$\frac{dE_m}{dt} = \mathcal{P}^{NC}$$

Ou de manière équivalente :

$$\Delta E_m = E_m(t_2) - E_m(t_1) = W_{\vec{F}NC}^{1\to 2}$$

Le théorème de l'énergie mécanique est donc parfaitement équivalent au théorème de l'énergie cinétique. Dans un exercice, on peut donc appliquer soit l'un, soit l'autre, mais appliquer les deux serait redondant.

Cas particulier d'un système conservatif

Un système conservatif est un système soumis uniquement à des forces conservatives et / ou des forces non conservatives perpendiculaires au mouvement (donc qui ne travaillent pas). Dans ce cas on peut écrire :

$$\frac{dE_m}{dt} = 0$$

Ce qui veut dire que l'énergie mécanique est alors une grandeur constante, qui se conserve au cours du temps.

Une autre manière de le montrer est d'appliquer le théorème de l'énergie cinétique :

$$\Delta E_c = W_{\vec{F}tot}^{1\to 2}$$

Comme toutes les forces sont conservatives elles dérivent toutes d'une énergie potentielle, et l'on peut écrire

$$W_{\vec{F}tot}^{1\to 2} = -\Delta E_p$$

On a donc :

$$\Delta E_c = -\Delta E_p$$

Soit

$$\Delta E_m = \Delta E_c + \Delta E_p = 0$$

3.3. Exemples

Energie potentielle de pesanteur

En premier lieu, nous devons savoir si le poids est une force conservative. Si nous parvenons à trouver une fonction dont dérive l'expression mathématique de la force de pesanteur, nous aurons à la fois prouvé que le poids est une force conservative et déterminé l'énergie potentielle de pesanteur.

En supposant que l'axe vertical est orienté vers le haut nous avons :

$$\vec{P} = -mg\vec{u}_z$$

On peut ainsi calculer le travail élémentaire :

$$\delta W_{\vec{P}} = \vec{P} \cdot d\overrightarrow{OM} = -mgdz$$

Il est donc possible d'exprimer ce travail sous la forme d'une différentielle, ce qui signifie qu'on peut déterminer une énergie potentielle en intégrant cette expression :

$$dE_{PP} = -\delta W_{\vec{P}} = mgdz$$

Ce qui donne :

$$E_{PP}(z) = \int mgdz + cste$$

On aboutit finalement à :

$$\boxed{E_{PP}(z) = mgz + cste}$$

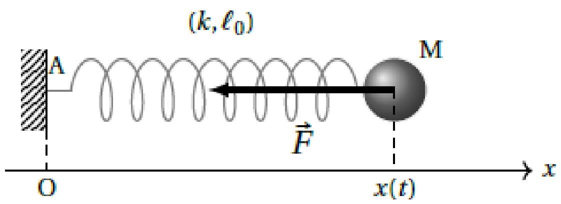
La constante d'intégration peut être fixée arbitrairement. Si par exemple nous prenons comme référence l'origine du repère d'espace nous pouvons fixer $E_{PP}(0) = 0$ et dans ce cas :

$$E_{PP}(z) = mgz$$

Energie potentielle élastique

La méthode est la même que précédemment. Prenons un ressort horizontal, de constante de raideur k, de longueur à vide l_0. On peut alors écrire :

$$\vec{F}_{el} = -k(l - l_0)\vec{u}_x$$



On définit la variable x par : $x = l - l_0$, ce qui permet d'écrire :

$$\vec{F}_{el} = -kx\vec{u}_x$$

A VOUS DE JOUER

1. Déterminer l'énergie potentielle élastique $E_{P,el}(x)$.

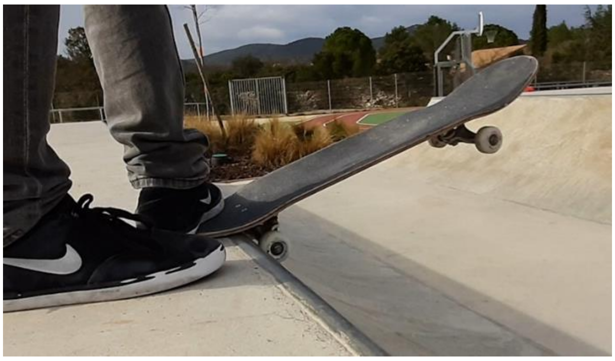
2. On impose $E_{P,el}(0) = 0$. Que devient l'expression de l'énergie potentielle ?

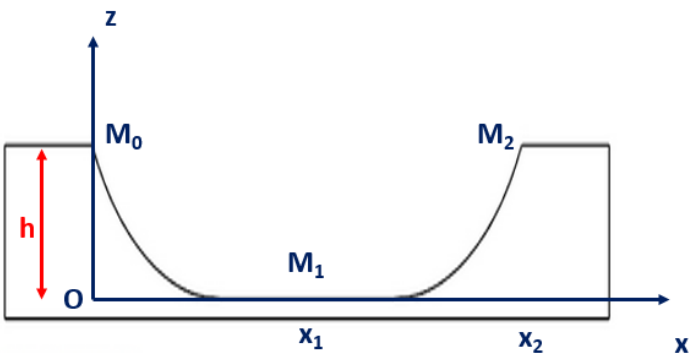
4. Mouvement et points d'équilibre en 1 dimension

Dans le cas de systèmes conservatifs, les théorèmes que l'on vient de voir peuvent nous permettre d'analyser le mouvement d'un point matériel de manière très simple à partir d'un graphe énergétique. Dans toute la suite, on se place dans le cas d'un système conservatif à une dimension.

4.1. Un exemple pour commencer : le skatepark !

Vous êtes au skatepark, sur votre skateboard donc (ou rollers, trottinette, peu importe). On suppose que les frottements de la piste sont négligeables et donc que les forces sont conservatives.





La rampe à une hauteur h = 2 m, vous partez d'en haut (point M_0), sans vitesse initiale. Nous nous posons pour l'instant deux questions :

- A quelle vitesse arrive-ton au point M_1 ?
- Est-ce suffisant pour atteindre ensuite le point M_2 ?

L'application du théorème de l'énergie cinétique nous permet de répondre facilement à la première question :

$$\Delta E_c = W_{\vec{F}tot}^{1\to 2}$$

Ici seul le poids travaille puisque sans frottements la réaction du support est orthogonale à la trajectoire.

On a donc :

$$\Delta E_c = -\Delta E_{pp}$$

Soit :

$$\frac{1}{2}m{v_1}^2 - \frac{1}{2}m{v_0}^2 = mgh$$

Comme la vitesse initiale est nulle : $\frac{1}{2}{v_1}^2 = gh$

Soit encore : $v_1 = \sqrt{2gh}$

A VOUS DE JOUER

1. Déterminer l'énergie mécanique du système en M_0

2. Déterminer l'énergie mécanique du système en M_1. Conclusion ?

3. Comment interpréter le passage de M_0 en M_1 en termes de conversion d'énergie ?

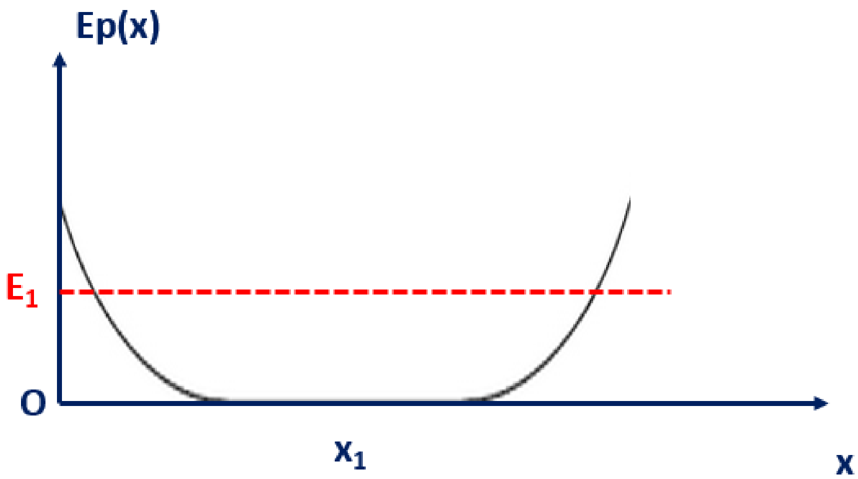
4. Le système atteindra-t-il le point M_2 ? Répondre en raisonnant sur l'énergie.

5. Prévoir qualitativement l'évolution du système en tenant compte des frottements

6. Montrer qu'en tout point $E_p \leq E_m$

7. En déduire les points accessibles au système pour une énergie mécanique initiale Em_0

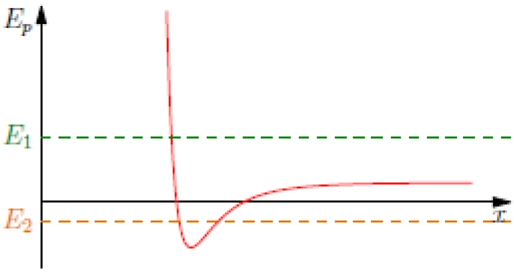
En réalité, ce problème à deux dimensions peut être réduit à un problème à 1 dimension : la trajectoire étant imposée par la forme de la rampe, la valeur de z est imposée quel que soit x : cette forme représente en fait la variation d'énergie potentielle $E_p(x)$. En fait, on peut le considérer comme un profil énergétique :

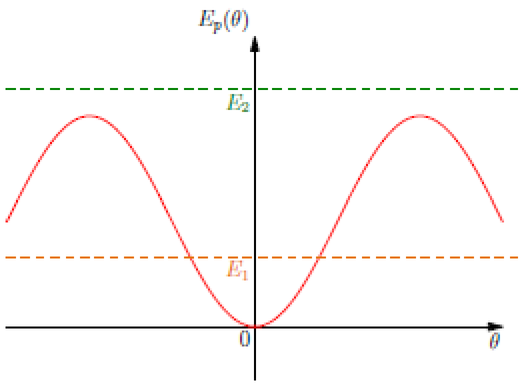


Sur le graphe ci-dessus, on représente l'énergie mécanique totale du système E_1 par une droite horizontale. Les états (positions) accessibles au système sont ceux situés sous cette droite. Dans le cas d'un système conservatif, on assistera à des oscillations entre les deux positions extrêmes (nous étudierons cela dans le chapitre suivant).

A VOUS DE JOUER

Les deux courbes ci-dessous représentent le graphe d'énergie potentielle de deux systèmes conservatifs. Obtenir, dans les deux cas, les points accessibles lorsque l'énergie mécanique vaut $E_m = E_1$ puis $E_m = E_2$.





A partir de l'analyse d'un graphe d'énergie potentielle d'un système conservatif, on peut décrire qualitativement le mouvement d'un système. On observe généralement :

- Des oscillations entre deux points extrêmes ; on parle alors d'**état lié**.
- Un déplacement jusqu'à l'infini ; on parle alors d'**état libre**, ou d'état de diffusion.

4.2. Point d'équilibre

A VOUS DE JOUER

Soit un système conservatif, soumis à une résultante de forces $\vec{F} = F(x)\vec{u}_x$.

1. Que vaut la force au point d'équilibre $x = x_{eq}$?
2. Rappeler le lien entre force et énergie potentielle
3. En déduire une condition sur l'énergie potentielle pour être à l'équilibre.
4. Que signifie ce résultat d'un point de vue géométrique ?

Dans un système conservatif à une dimension (notons x cette dimension), on peut écrire la résultante des forces qui travaillent ainsi :

$$\vec{F} = F(x) \cdot \vec{u}_x$$

Avec :

$$F(x) = -\frac{dE_p(x)}{dx}$$

L'état d'équilibre correspondant à une résultante des forces nulles on peut en conclure qu'on a à l'équilibre :

$$\frac{dE_p(x)}{dx}$$

A RETENIR

Les points d'équilibre x_{eq} d'un système conservatif à une dimension vérifient l'équation :

$$\left(\frac{dE_p(x)}{dx}\right)_{x=x_{eq}} = 0$$

Graphiquement cela correspond à un extremum de l'énergie potentielle (minium ou maximum).

Stabilité d'un point d'équilibre

DEFINITION

- On dit qu'un point d'équilibre est **stable** si, lorsque le système est écarté de sa position d'équilibre, il revient à sa position initiale. On admettra que cela correspond à un **minimum** de l'énergie potentielle.
- On dit qu'un point d'équilibre est **instable** si, lorsque le système est écarté de sa position d'équilibre, il s'éloigne définitivement de sa position initiale. On admettra que cela correspond à un **maximum** de l'énergie potentielle.

A VOUS DE JOUER

Indiquer les positions d'équilibre sur les deux graphes suivants, et préciser s'il s'agit d'équilibres stables ou instables.