

TD 7 Approche énergétique

Ex 1 : Applications du cours

1° Curling

Syst : pierre de curling

Bilan des forces : $\vec{P}$: poids $\vec{R} = \vec{R}_N + \vec{R}_T$

(condition de glissement $\|\vec{R}_T\| = \mu_d \|\vec{R}_N\| = f \|\vec{R}_N\|$)
donnée de l'exercice.

Plan horizontal : $P = R_N = mg$

On en déduit $R_T = fmg$

Th E_c : $E_{cf} - E_{ci} = W(\vec{P}) + W(\vec{R}_N) + W(\vec{R}_T)$

$$0 - \frac{1}{2} m v_0^2 = 0 + 0 + fmg d \cos 180^\circ$$

$$d = \frac{v_0^2}{2fg}$$

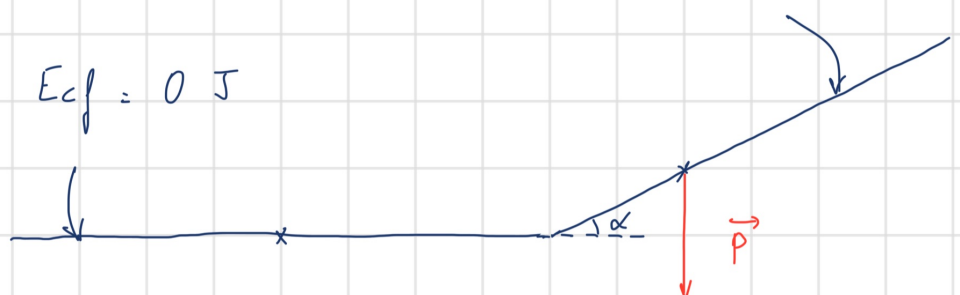
$$E_{ci} = 0 \text{ J}$$

2° Pente

Syst : voiture

Bilan des forces :

$\vec{P}$, $\vec{R}_N$, $\vec{F}$ ($= \vec{R}_T$)



* Sur la pente :

$$W(\vec{P}) = mgd \cos(\pi/2 - \alpha) = mgd \sin \alpha$$

$$W(\vec{R}_N) = R_N d \cos \pi/2 = 0 \text{ J}$$

$$W(\vec{F}) = Fd \cos \pi = -Fd$$

* Sur la route horizontale :

$$W(\vec{P}) = mgD \cos \pi/2 = 0 \text{ J}$$

$$W(\vec{R}_N) = R_N D \cos \pi/2 = 0 \text{ J}$$

$$W(\vec{F}) = FD \cos \pi = -FD$$

Th de l'Ec :

$$\Delta E_c = E_{cf} - E_{ci} = 0 = mgd \sin \alpha - Fd - FD$$

$$d'ou \quad D = \frac{mgd \sin \alpha}{F} - d$$

3° Cube sans frottements

1° Le cube monte le long du plan incliné, sa vitesse diminue progressivement il s'arrête puis redescend en accélérant

2° Bilan des forces : $\vec{P}$, $\vec{R}_N$

$\vec{P}$ dérive d'une énergie potentielle, c'est une force conservative

$$\vec{P} = -mg \vec{u}_z$$

$$\vec{P} = -\vec{\text{grad}} E_p = -\frac{dE_p}{dz} \vec{u}_z$$

donc $E_p = mgz$ (cte = 0 pour $z = 0$)

⚠ La réaction normale ne dérive pas d'une énergie potentielle, elle n'est donc pas une force conservative.
Cependant son travail est nul !

3) On peut qualifier le système de conservatif car il n'y a pas de force de frottements ou de force dissipative d'énergie.

4) Conservation E_m :

$$E_{ci} + E_{ppi} = E_{cf} + E_{ppf}$$

$$\frac{1}{2} m v_0^2 + 0 = 0 + mgd \sin \alpha$$

d'où $d = \frac{v_0^2}{2g \sin \alpha}$

5) $h = d \sin \alpha = \frac{v_0^2}{2g}$

4° Cube avec frottements

1° Le cube monte en ralentissant puis s'arrête

2° $\vec{P}$, $\vec{R}_N$, $\vec{R}_T$

3° En glissement $R_T = \mu R_N$

Sur un plan incliné $R_N = mg \cos \alpha$ donc $R_T = \mu mg \cos \alpha$

4° $W(\vec{R}_T) = -\mu mg \cos \alpha d$

5° Théorème de l'énergie cinétique :

$$\Delta E_c = W(\vec{P}) + W(\vec{R}_N) + W(\vec{R}_T)$$

$$0 - \frac{1}{2} m v_0^2 = mg d \cos(\pi/2 + \alpha) + 0 - \mu mg \cos \alpha d$$

$$- \frac{1}{2} m v_0^2 = - mg d \sin \alpha - \mu mg \cos \alpha d$$

$$d = \frac{v_0^2}{2g(\sin \alpha + \cos \alpha)}$$

6° $d < d'$: les frottements réduisent la distance parcourue

Ex 2 Chute libre

1° $\delta W = \vec{P} \cdot d\vec{OM}$ avec $\vec{P} = -mg \vec{u}_z$ et $d\vec{OM} = dz \vec{u}_z$

$$\delta W = -mg dz$$

2° Phase ascendante $dz > 0$ donc $\delta W < 0$ Travail résistant

Phase descendante $dz < 0$ donc $\delta W > 0$ Travail moteur

→ Logique, le poids est orienté vers le bas donc il s'oppose à la montée et favorise la descente

3° Théorème de l'énergie mécanique :

$$E_{mf} = E_{mi}$$

$$E_{cf} + E_{ppf} = E_{ci} + E_{ppi}$$

$$\frac{1}{2} m v_f^2 + 0 = \frac{1}{2} m v_0^2 + mgh$$

$$v = \sqrt{v_0^2 + 2gh}$$

4° $E_{mf} = E_{mi}$

$$E_{cf} + E_{ppf} = E_{ci} + E_{ppi}$$

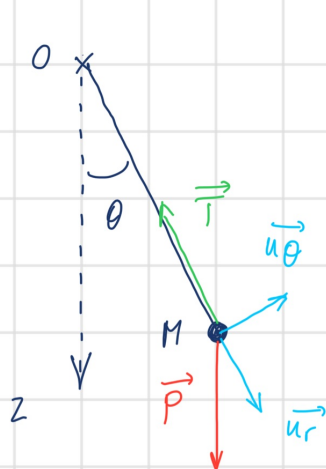
$$0 + mgH = \frac{1}{2} m v_0^2 + mgh$$

$$H = \frac{v_0^2}{2g} + h$$

Dans le cas d'un tir parabolique $H = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g} + h$

Ex 3 Oscillations d'un pendule

1°



Système : bille de masse m

Référentiel terrestre supposé galiléen

Bilan des forces : $\vec{P} = mg \vec{u}_z$ et $\vec{T}$

2° Base polaire avec $\vec{u}_r$ le long du fil et $\vec{u}_\theta$ dans le sens croissant de θ

$$\vec{OM} = l \vec{u}_r$$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{OM}}{dt} = \frac{dl \vec{u}_r}{dt} = l \dot{\theta} \vec{u}_\theta$$

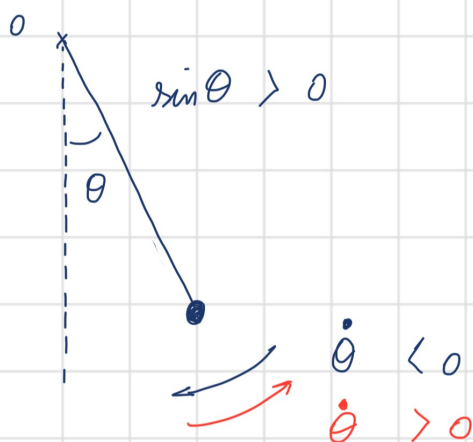
$$3^\circ \mathcal{P}(\vec{P}) = \vec{P} \cdot \vec{v} = mg \vec{u}_z \cdot l \dot{\theta} \vec{u}_\theta = -mgl \dot{\theta} \sin \theta$$

$$\mathcal{P}(\vec{T}) = \vec{T} \cdot \vec{v} = 0$$

$$\mathcal{P}_{\text{totale}} = -mgl \dot{\theta} \sin \theta$$

4° Si $\dot{\theta} \sin \theta < 0$ alors la puissance totale est motrice

Si $\dot{\theta} \sin \theta > 0$ alors la puissance totale est résistante



5° Théorème de la puissance cinétique :

$$\frac{dE_c}{dt} = P_{\text{totale}}$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m v^2 \right) = - m g l \dot{\theta} \sin \theta$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m l^2 \dot{\theta}^2 \right) = - m g l \dot{\theta} \sin \theta$$

$$\frac{1}{2} m l^2 \times 2 \ddot{\theta} = - m g l \dot{\theta} \sin \theta$$

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \sin \theta = 0$$

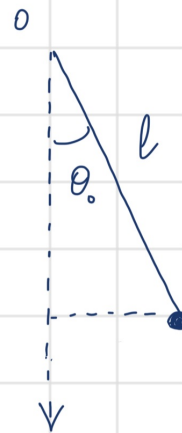
$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \theta = 0 \quad (\text{si } \sin \theta \approx \theta \text{ petits angles})$$

oscillateur harmonique

6° $E_m(\theta = 0) = E_m(\theta = \theta_0)$

$$\frac{1}{2} m v^2 + 0 = 0 + m g l (1 - \cos \theta_0)$$

réf. différence d'altitude



$$v = \sqrt{2 g l (1 - \cos \theta_0)}$$

Vitesse angulaire :

$$\omega = \dot{\theta} = \frac{v}{l} = \sqrt{\frac{2g}{l} (1 - \cos \theta_0)}$$

Ex 4 : Saut à l'élastique

1° Phase 1 : chute libre, l'élastique n'intervient pas, seule force considérée : le poids $\vec{P}$

↳ Mouvement rectiligne accéléré

Phase 2 : l'élastique commence à se tendre, on considère deux forces le poids et la force élastique

↳ Mouvement rectiligne ralenti

2° Théorème de l'énergie mécanique :

$$E_{m_i} = E_{m(0)}$$

$$\frac{1}{2} m v_i^2 + mgh = \frac{1}{2} m v_0^2 + mg(h - l_0)$$

$$0 + \cancel{mgh} = \frac{1}{2} m v_0^2 + \cancel{mgh} - mgl_0$$

$$v_0 = \sqrt{2gl_0}$$

3°



$$\vec{F} = -kz \vec{u}_z$$

$$\vec{P} = mg \vec{u}_z$$

$$\begin{aligned} \vec{F} &= -k[(l_0 + z) - l_0] \vec{u}_z \\ &= -kz \vec{u}_z \end{aligned}$$

$$\vec{F} = -\vec{\text{grad}} E_p$$

$$-kz = -\frac{dE_p}{dz}$$

$$E_p = \frac{1}{2} kz^2$$

$$\vec{P} = - \vec{\text{grad}} E_{pp}$$

$$mg = - \frac{dE_{pp}}{dz}$$

$$E_{pp} = - mgz$$

$\nearrow$
Oz descendant !

Énergie potentielle totale : $E_p = \frac{1}{2} k z^2 - mgz$

Condition d'équilibre : une position d'équilibre correspond à un extremum d'énergie potentielle.

$$\frac{dE_p}{dz} = kz - mg$$

$$\left(\frac{dE_p}{dz} \right)_{z=z_{eq}} = 0 = kz_{eq} - mg \quad \text{donc} \quad z_{eq} = \frac{mg}{k}$$

Stable ou instable ?

$$\frac{d^2 E_p}{dz^2} = k > 0 \quad \text{donc stable}$$

4° Allongement maximale de l'élastique :

$$E_{mi} = E_{mf}$$

$$0 + mgh = 0 + mg(h - l_0 - z_{max}) + \frac{1}{2} k z_{max}^2$$

$$\frac{1}{2} k z_{max}^2 - mg z_{max} - mg l_0 = 0$$

$$z_{max} = \frac{mg + \sqrt{m^2 g^2 + 2 k m g l_0}}{k} = 102 \text{ m} < h = 112 \text{ m}$$

Ex 5 : Looping

1° a) Conservation de l'énergie mécanique

$$E_m(B) = E_m(A)$$

$$\frac{1}{2} m v_B^2 + 0 = 0 + mgh$$

$$v_B = \sqrt{2gh}$$

b) Altitude du point M : $z_M = a + a \sin \theta = a(1 + \sin \theta)$

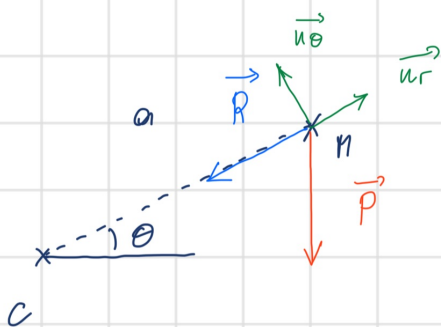
Conservation de l'énergie mécanique

$$E_m(B) = E_m(M) \quad (E_m(B) = \frac{1}{2} m v_B^2 = mgh)$$

$$mgh = \frac{1}{2} m v_M^2 + mga(1 + \sin \theta)$$

$$v_M = \sqrt{2g(h - a(1 + \sin \theta))}$$

2° a)



$$\vec{R} \begin{cases} -R \\ 0 \end{cases} \quad \vec{P} \begin{cases} -mg \sin \theta \\ -mg \cos \theta \end{cases}$$

$$\vec{CM} = a \vec{u}_r \quad \vec{v} = a \dot{\theta} \vec{u}_\theta \quad \vec{a} = -a \dot{\theta}^2 \vec{u}_r = -\frac{v^2}{a} \vec{u}_r$$

PFD en projection radiale :

$$-m \frac{v^2}{a} = -R - mg \sin \theta$$

$$R = m \left(\frac{v^2}{a} - g \sin \theta \right) \text{ avec } v = \sqrt{2g(h - a(1 + \sin \theta))}$$

$$R = mg \left(\frac{2h}{a} - 2 - 3 \sin \theta \right)$$

b) La réaction R est minimale au sommet $\theta = \pi/2$

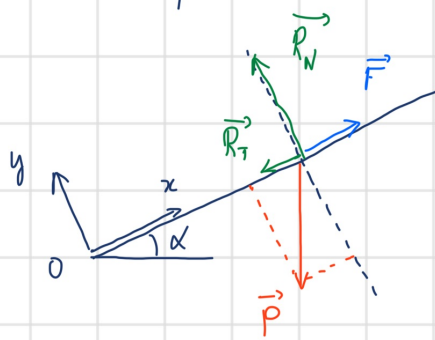
$$c) R_{\min} = mg \left(\frac{2h}{a} - 5 \right)$$

$$\text{Condition de contact } R_{\min} \geq 0 \quad \text{d'où } h_{\min} = \frac{5}{2} a$$

3° On veut que $R \geq \frac{1}{4} P$

$$mg \left(\frac{2h}{a} - 5 \right) \geq \frac{1}{4} mg \quad \text{d'où } h_{\min} = \frac{21}{8} a = 12,3 \text{ m}$$

Ex 6 Remonte pente



$$\vec{P} \begin{cases} - mg \sin \alpha = - \frac{mgh}{L} \\ - mg \cos \alpha \end{cases}$$

$$R_N = mg \cos \alpha$$

$$R_T = f mg \cos \alpha \approx f mg$$

La force F doit compenser P_x et R_T

$$F = mg \left(f + \frac{h}{L} \right) \quad (\text{pour 1 skieur})$$

$$\text{Pour } N \text{ skieur : } F = N mg \left(f + \frac{h}{L} \right)$$

$$S_{\text{moteur}} = \vec{F} \cdot \vec{v} = N mg \left(f + \frac{h}{L} \right) v = 5600 \text{ W}$$