TD 8

Oscillateurs

Exercice 1 : Ressort vertical sans frottement

On considère un ressort vertical de longueur à vide l_0 attaché à un support en un point P fixe dans le référentiel d'étude et auquel est suspendue une masse m. On note k la constante de raideur du ressort. On choisit (Oz) l'axe vertical descendant avec O situé au bout du ressort vertical lorsque celui-ci est à la longueur à vide.

On néglige les frottements pouvant s'exercer sur la masse. On suppose que celle-ci est initialement en $z = z_{eq}$ mais qu'un choc lui communique une vitesse initiale $\vec{v}_0 = -v_0\vec{u}_z$ $(v_0 > 0)$.

1. Faire un schéma.
2. Obtenir l'expression de la position d'équilibre z_{eq} de la masse.
3. Etablir l'équation du mouvement de la masse par la méthode de votre choix.
4. Résoudre l'équation du mouvement en utilisant les conditions initiales citées ci-dessus.

Exercice 2 : Ressort vertical avec frottement

On reprend le problème précédent mais on suppose cette fois que des frottements de fluide de la forme $\vec{f} = -\alpha\vec{v}$ s'exercent sur la masse. Les conditions initiales restent les mêmes : la masse est initialement en $z = z_{eq}$ et un choc lui communique une vitesse initiale $\vec{v}_0 = -v_0\vec{u}_z$ $(v_0 > 0)$.

1. Obtenir l'expression de la position d'équilibre z_{eq} de la masse.
2. Etablir l'équation du mouvement de la masse par la méthode de votre choix.
3. Quelle est la condition sur α pour obtenir un retour à l'équilibre le plus rapide possible ?
4. En déduire l'expression de $z(t)$ dans ce cas particulier.

Exercice 3 : Oscillations d'un pendule

On considère une masse m suspendue à un fil inélastique de longueur l. Le fil est attaché à un point O fixe dans le référentiel d'étude. Le pendule est lâché à la position $\theta = 0$. Un choc lui communique une vitesse initiale $\vec{v}_0 = v_0\vec{u}_\theta$

Dans un premier temps, on néglige les frottements qui pourraient s'exercer sur la masse.

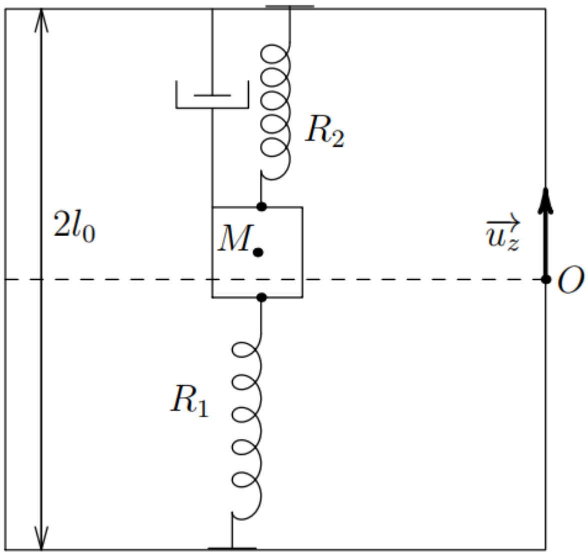
1. Etablir l'équation du mouvement du pendule dans le cadre des petites oscillations.
2. Résoudre cette équation en tenant compte des conditions initiales.

On suppose désormais que des frottements de fluide de la forme $\vec{f} = -\alpha\vec{v}$ s'exercent sur la masse.

3. Obtenir les équations du mouvement du pendule par une méthode au choix.
4. Quelle est la condition sur α pour se situer en régime apériodique ?
5. Résoudre l'équation du mouvement dans en régime apériodique.

Exercice 4 : Accéléromètre

Un accéléromètre peut être modélisé par une boîte contenant une masse accrochée à deux ressorts verticaux, l'un au-dessus et l'autre en-dessous d'elle, couplé à un système d'amortissement visqueux modélisé par une force de la forme $\vec{f} = -\alpha\vec{v}$ avec $\vec{v}$ la vitesse de la masse dans le référentiel de la boîte.



Les deux ressorts ont une même constante de raideur k et une même longueur à vide l_0. La hauteur totale de la cavité est exactement $2l_0$. Un système électronique, non indiqué sur le schéma, permet de connaître la position de la masse. Le but de l'accéléromètre est de mesurer l'accélération de la boîte à partir de la connaissance de cette position.

On suppose dans un premier temps la cavité au repos dans le référentiel terrestre supposé galiléen.

1. Obtenir l'expression de la position d'équilibre z_{eq} de la masse.
2. Etablir l'équation du mouvement de la masse.
3. On note $L(t) = z - z_{eq}$. Que devient l'équation du mouvement ?
4. Quelle est la condition sur α pour que la masse oscille ?
5. Résoudre dans le cas où la masse oscille, en supposant que la masse se trouve initialement en z_{eq} avec une vitesse initiale $\vec{v}_0 = v_0\vec{u}_z$

On suppose à présent que la cavité subit une accélération verticale $\vec{a}_{cav} = a_{cav}\vec{u}_z$ constante. On continue l'étude dans le référentiel non galiléen de la cavité.

6. Montrer que l'équation du mouvement s'écrit alors :

$$\frac{d^2L}{dt^2} + \frac{\alpha}{m}\frac{dL}{dt} + \frac{2k}{m}L = -a_{cav}$$

7. Montrer que L(t) atteint une valeur limite, que l'on déterminera.
8. En déduire le fonctionnement de l'accéléromètre.