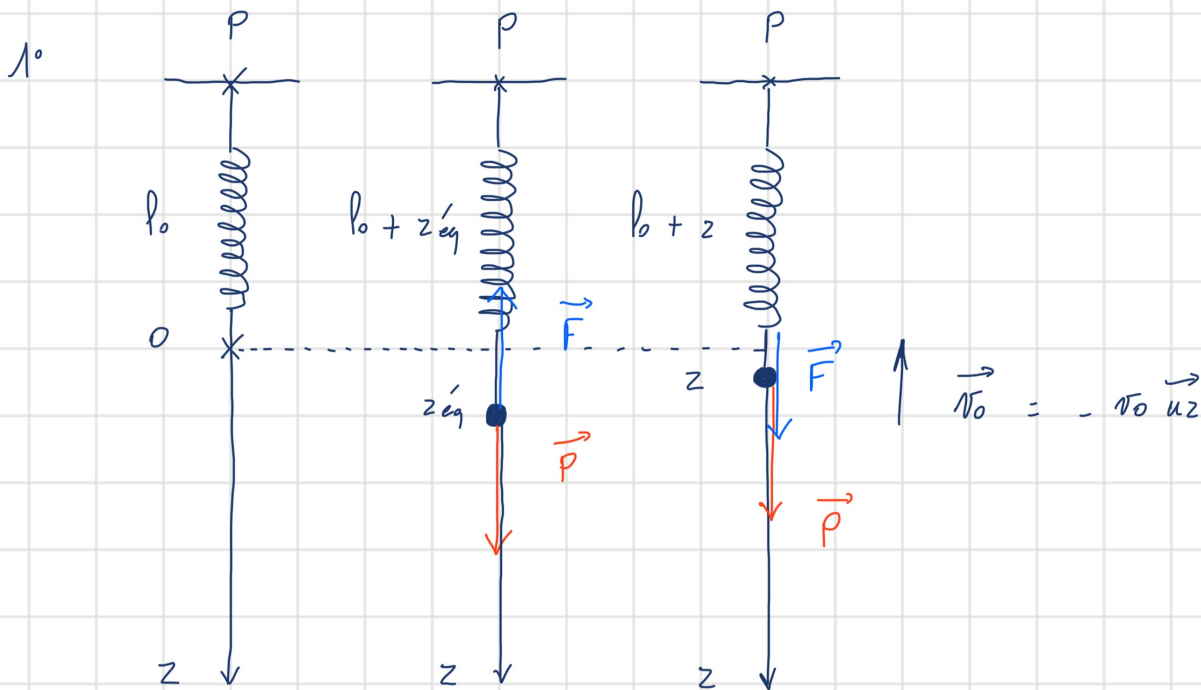


TD 8 Oscillateurs

Ex 1 : Ressort vertical sans frottements



2° $\vec{P} + \vec{F} = \vec{0}$

$$mg \vec{u}_z - k(l_0 + z'_{eq} - l_0) \vec{u}_z = \vec{0}$$

en projection sur Oz : $mg - kz'_{eq} = 0$

$$z'_{eq} = \frac{mg}{k}$$

3° PFD : $m\vec{a} = \vec{P} + \vec{F}$ (avec $\vec{OI} = z \vec{u}_z$)

$$m\ddot{z} = mg - kz \quad (\text{en projection sur } Oz)$$

$$\ddot{z} + \frac{k}{m} z = g$$

4' On déplace l'origine du repère en Π_{eq} :

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_{\text{eq}}} + \overrightarrow{\Pi_{\text{eq}}\Pi} \quad \text{d'où} \quad z = z_{\text{eq}} + Z$$

$$\text{et} \quad Z = z - z_{\text{eq}}$$

$$\dot{Z} = \dot{z}$$

$$\ddot{Z} = \ddot{z}$$

L'équation différentielle devient : $\ddot{Z} + \omega_0^2 Z = 0$

$$\text{avec} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \text{et} \quad Z = z - z_{\text{eq}}$$

La solution de cette équation différentielle s'écrit :

$$Z(t) = A \cos \omega_0 t + B \sin \omega_0 t$$

$$\text{Conditions initiales : } Z(0) = 0 = A + 0 \quad \text{d'où} \quad A = 0$$

$$\dot{Z}(0) = -v_0 = 0 + B\omega_0 \quad \text{d'où} \quad B = -\frac{v_0}{\omega_0}$$

$$Z(t) = -\frac{v_0}{\omega_0} \sin \omega_0 t$$

$$z(t) = z_{\text{eq}} - \frac{v_0}{\omega_0} \sin \omega_0 t$$

Ex 2 : Ressort vertical avec frottement

1° $z_{\text{eq}} = \frac{mg}{k}$

2° PFD : $m\vec{a} = \vec{P} + \vec{F} + \vec{f}$

en projection sur Oz on obtient :

$$m\ddot{z} = mg - kz - \alpha \dot{z}$$

$$m\ddot{z} = kz_{\text{eq}} - kz - \alpha \dot{z}$$

$$m\ddot{z} + \alpha \dot{z} + kz = kz_{\text{eq}}$$

$$\ddot{z} + \frac{\alpha}{m} \dot{z} + \frac{k}{m} z = \frac{k}{m} z_{\text{eq}}$$

$$\ddot{z} + \frac{\omega_0}{Q} \dot{z} + \omega_0^2 z = \omega_0^2 z_{\text{eq}} \quad \text{avec} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$\text{et} \quad Q = \frac{1}{\alpha} \sqrt{km}$$

On déplace l'origine du repère en M_{eq}

$$\vec{OM} = \vec{OM}_{\text{eq}} + \vec{M}_{\text{eq}}\vec{M} \quad \text{d'où} \quad z = z_{\text{eq}} + Z$$

$$\text{et} \quad Z = z - z_{\text{eq}}$$

$$\dot{Z} = \dot{z}$$

$$\ddot{Z} = \ddot{z}$$

L'équation différentielle devient : $\ddot{Z} + \frac{\omega_0}{Q} \dot{Z} + \omega_0^2 Z = 0$

3° Equation caractéristique : $r^2 + \frac{\omega_0}{Q} r + \omega_0^2 = 0$

$$\Delta = \left(\frac{\omega_0}{Q} \right)^2 - 4\omega_0^2$$

Retour le plus rapide à l'équilibre :

→ régime critique $\Delta = 0$ et $Q = \frac{1}{2} = \frac{1}{\alpha} \sqrt{k_m}$

donc $\alpha = 2\sqrt{k_m}$

4° $r = \frac{\omega_0}{2Q} = \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$

$$Z(t) = (At + B) e^{-\omega_0 t}$$

$$\dot{Z}(t) = A e^{-\omega_0 t} - \omega_0 (At + B) e^{-\omega_0 t}$$

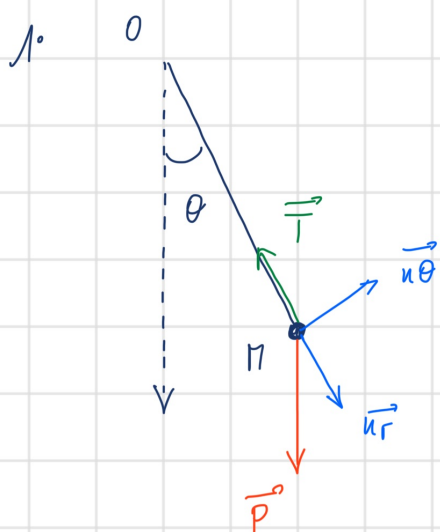
Cond. init : $Z(0) = 0 = B$

$$\dot{Z}(0) = -v_0 = A$$

$$Z(t) = -v_0 t e^{-\omega_0 t}$$

$z(t) = z_{eq} - v_0 t e^{-\omega_0 t}$

Ex 3 : Oscillations d'un pendule



Système : pendule de masse m et de longueur l

Ref terrestre supposé galiléen

Bilan des forces : poids $\vec{P}$, tension $\vec{T}$

$$\vec{OM} = l \vec{u}_r \quad / \quad \vec{v} = l \dot{\theta} \vec{u}_\theta \quad / \quad \vec{a} = -l \dot{\theta}^2 \vec{u}_r + l \ddot{\theta} \vec{u}_\theta$$

PFD $m\vec{a} = \vec{P} + \vec{T}$ qu'on projette dans la base plane

$$\begin{cases} -m l \dot{\theta}^2 = m g \cos \theta - T & (1) \\ m l \ddot{\theta} = -m g \sin \theta & (2) \end{cases}$$

(2) + approximation des petits angles : $\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \theta = 0$

$$2. \theta(t) = A \cos \omega_0 t + B \sin \omega_0 t$$

$$\dot{\theta}(t) = -A \omega_0 \sin \omega_0 t + B \omega_0 \cos \omega_0 t$$

$$\theta(0) = 0 = A$$

$$\dot{\theta}(0) = \frac{v_0}{l} = B \omega_0$$

$$\theta(t) = \frac{v_0}{l \omega_0} \sin \omega_0 t$$

3° Théorème de la puissance mécanique :

$$\frac{dE_c}{dt} = \mathcal{P}(\vec{P}) + \mathcal{P}(\vec{T}) + \mathcal{P}(\vec{f}) \quad \vec{O\Gamma} = l \vec{ur}$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m v^2 \right) = \vec{P} \cdot \vec{v} + \vec{T} \cdot \vec{v} + \vec{f} \cdot \vec{v} \quad \vec{v} = l \dot{\theta} \vec{u_\theta}$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m l^2 \dot{\theta}^2 \right) = m g \vec{uz} \cdot l \dot{\theta} \vec{u_\theta} - T \vec{ur} \cdot l \dot{\theta} \vec{u_\theta} - \alpha l \dot{\theta} \vec{u_\theta} \cdot l \dot{\theta} \vec{u_\theta}$$

$$m l^2 \dot{\theta} \ddot{\theta} = - m g l \dot{\theta} \sin \theta - \alpha l^2 \dot{\theta}^2$$

$$m l \ddot{\theta} + \alpha l \dot{\theta} + m g \sin \theta = 0 \quad (\sin \theta \approx \theta)$$

$$\ddot{\theta} + \frac{\alpha}{m} \dot{\theta} + \frac{g}{l} \theta = 0$$

$$4^\circ \quad r^2 + \frac{\alpha}{m} r + \frac{g}{l} = 0$$

$$\Delta = \left(\frac{\alpha}{m} \right)^2 - \frac{4g}{l}$$

Régime aperiodique $\Delta > 0$ d'où $\alpha > 2m \sqrt{\frac{g}{l}}$

$$5^\circ \quad r_{1,2} = -\frac{\alpha}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{\alpha}{2m} \right)^2 - \frac{g}{l}}$$

$$\theta(t) = A e^{r_1 t} + B e^{r_2 t} \quad \dot{\theta}(t) = r_1 A e^{r_1 t} + r_2 B e^{r_2 t}$$

Conditions initiales $\theta(0) = 0 = A + B$ $\dot{\theta}(0) = \frac{v_0}{l} = r_1 A + r_2 B$

$$A = \frac{v_0}{l(r_1 - r_2)} \quad \text{et} \quad B = -\frac{v_0}{l(r_1 - r_2)}$$

$$\theta(t) = \frac{v_0}{l(r_1 - r_2)} (e^{r_1 t} - e^{r_2 t})$$

Ex 4 : Accélérométrie

$$1^{\circ} \vec{P} = -mg \vec{u}_z$$

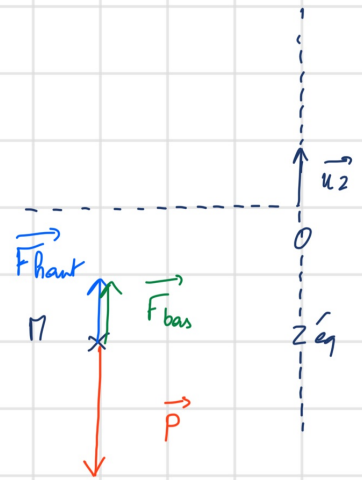
$$\vec{F}_{haut} = -k[(l_0 + z) - l_0](-\vec{u}_z) = kz \vec{u}_z$$

$$\vec{F}_{bas} = -k[(l_0 - z) - l_0](\vec{u}_z) = kz \vec{u}_z$$

$$\vec{P} + \vec{F}_{haut} + \vec{F}_{bas} = \vec{0}$$

$$-mg \vec{u}_z + 2kz_{eq} \vec{u}_z = \vec{0}$$

$$z_{eq} = \frac{mg}{2k}$$



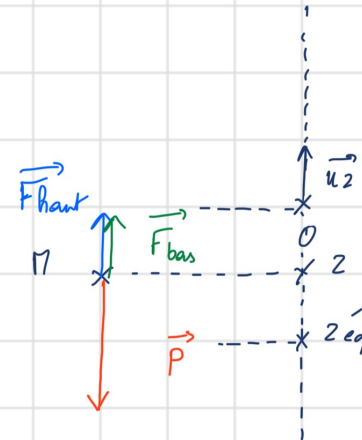
$$2^{\circ} \vec{OM} = -z \vec{u}_z$$

$$\vec{v} = -\dot{z} \vec{u}_z$$

$$\vec{a} = -\ddot{z} \vec{u}_z$$

$$\text{PFD : } m\vec{a} = \vec{P} + \vec{F}_{haut} + \vec{F}_{bas} + \vec{f}$$

$$-m\ddot{z} \vec{u}_z = -mg \vec{u}_z + 2kz \vec{u}_z + \alpha \dot{z} \vec{u}_z \quad (\text{projection sur } Oz)$$



$$\ddot{z} + \frac{\alpha}{m} \dot{z} + \frac{2k}{m} z = g$$

$$3^{\circ} z_{eq} = \frac{mg}{2k}$$

$$\ddot{z} + \frac{\alpha}{m} \dot{z} + \frac{2k}{m} z = \frac{2k}{m} z_{eq}$$

$$\ddot{z} + \frac{\alpha}{m} \dot{z} + \frac{2k}{m} (z - z_{eq}) = 0$$

$$L(t) = z - z_{\text{eq}}$$

$$\left(\frac{\alpha}{m}\right)^2 < \frac{m}{2k}$$

$$\ddot{L} + \frac{\alpha}{m} \dot{L} + \frac{2k}{m} L = 0$$

4° Equation caractéristique : $r^2 + \frac{\alpha}{m} r + \frac{2k}{m} = 0$

$$\Delta = \left(\frac{\alpha}{m}\right)^2 - \frac{8k}{m}$$

Manc oscillé si $\Delta < 0$ donc $\alpha < \sqrt{8km}$

5° $\Delta = - \left(\frac{8k}{m} - \left(\frac{\alpha}{m}\right)^2 \right)$

$$r = -\frac{\alpha}{2m} \pm j \sqrt{\frac{2k}{m} - \left(\frac{\alpha}{2m}\right)^2}$$

$$L(t) = e^{-\frac{\alpha}{2m}t} (A \cos \omega t + B \sin \omega t)$$

avec $\omega = \sqrt{\frac{2k}{m} - \left(\frac{\alpha}{2m}\right)^2}$

$$z(t) = z_{\text{eq}} + e^{-\frac{\alpha}{2m}t} (A \cos \omega t + B \sin \omega t)$$

$$\dot{z}(t) = -\frac{\alpha}{2m} e^{-\frac{\alpha}{2m}t} (A \cos \omega t + B \sin \omega t) + e^{-\frac{\alpha}{2m}t} \omega (-A \sin \omega t + B \cos \omega t)$$

Conditions initiales : $z(0) = z_{\text{eq}} = z_{\text{eq}} + A$ donc $A = 0$

$$\dot{z}(0) = v_0 = \omega B \text{ donc } B = \frac{v_0}{\omega}$$

$$z(t) = z_{eq} + e^{-\frac{\alpha}{2m}t} \frac{\pi_0}{\omega} \sin \omega t$$

6° Référentiel non galiléen de la cavité

$$\vec{a}_{cav} = a_{cav} \vec{u}_z$$

Force d'inertie d'entraînement $\vec{F}_{ic} = -m \vec{a}_{cav}$

Nouvelle équation :

$$\ddot{L} + \frac{\alpha}{m} \dot{L} + \frac{2k}{m} L = -a_{cav}$$

7° Valeur limite :

$$L_{lim} = -\frac{m}{2k} a_{cav}$$

8° Quand la cavité a une accélération constante a_{cav} , la masse finit par se stabiliser à une position fixe z_{lim} .

On obtient ainsi $L_{lim} = z_{lim} - z_{eq} = -\frac{m}{2k} a_{cav}$

et on déduit $a_{cav} = -\frac{2k}{m} (z_{lim} - z_{eq}) = -\frac{2k}{m} L_{lim}$

Plus la cavité accélère, plus la masse se décale par rapport à sa position d'équilibre.

L'accéléromètre mesure une position z , déduit L_{lim} et calcule a (k et m étant connues)