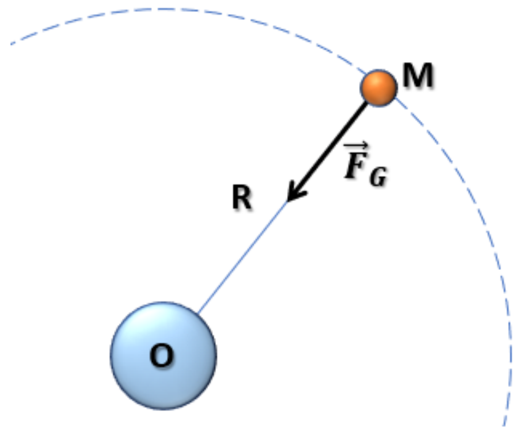
TD 6 Dynamique du point - Corrigé

Exercice 4 : Satellite en orbite

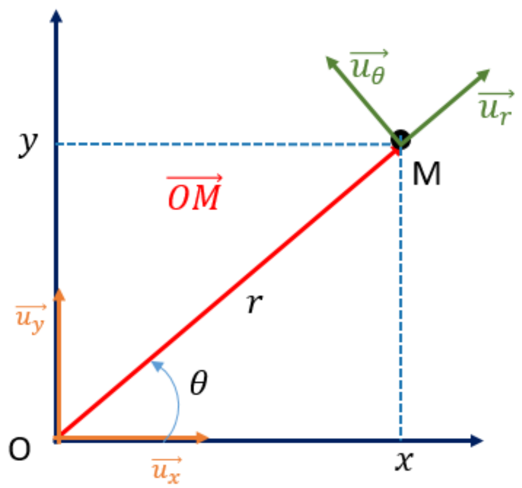
On considère un satellite, modélisé par un point matériel M de masse m, en rotation autour de la Terre de masse M_T sur une trajectoire circulaire de rayon R.

1. Faire un schéma de la situation.



2. Quelle est la base la plus adaptée à l'étude du mouvement du satellite ?

Base polaire $(\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_\theta})$ liée au point M :



3. Faire un bilan des forces et les représenter sur le schéma.
Cf réponse question 1
L'unique force qui s'exerce sur le système (le satellite assimilable au point M) est la force de gravitation :

$$\vec{F}_G = -\mathcal{G}\frac{M_T m}{R^2}\vec{u}_r$$

4. Déterminer les équations du mouvement du satellite.

Le référentiel d'étude $\mathcal{R}$ est le référentiel géocentrique (lié à la base cartésienne $\overrightarrow{u_x}, \overrightarrow{u_y}$ représentée sur le schéma précédent). Ce référentiel peut être supposé galiléen sur la durée de l'étude.

On peut donc appliquer à M le principe fondamental de la dynamique :

$$m\vec{a}_{M/\mathcal{R}} = \vec{F}_G$$

Pour exprimer le vecteur accélération dans la base polaire nous dérivons le vecteur position deux fois par rapport au temps :

$$\overrightarrow{OM} = R \cdot \vec{u}_r$$

$$\vec{v}_{M/\mathcal{R}} = R\dot{\theta}\vec{u}_\theta$$

$$\vec{a}_{M/\mathcal{R}} = -R\dot{\theta}^2\vec{u}_r + R\ddot{\theta}\vec{u}_\theta$$

On en déduit les deux équations obtenues par projection du PFD sur les deux vecteurs de la base polaire :

$$\begin{cases} -mR\dot{\theta}^2 = -\mathcal{G}\dfrac{M_T m}{R^2} \\ Rm\ddot{\theta} = 0 \end{cases}$$

Soit encore, en simplifiant les équations :

$$\begin{cases} \dot{\theta}^2 = \mathcal{G}\dfrac{M_T}{R^3} \\ \ddot{\theta} = 0 \end{cases}$$

5. En déduire que la vitesse angulaire du satellite est constante et donner son expression en fonction des données du problème.

En intégrant la deuxième équation il vient directement : $\dot{\theta} = cte = \omega$

La première équation permet d'exprimer ω :

$$\omega = \sqrt{\mathcal{G}\frac{M_T}{R^3}}$$

6. En déduire l'expression du vecteur position, de la vitesse et de l'accélération du satellite.

$$\vec{a}_{M/\mathcal{R}} = -\mathcal{G}\frac{M_T}{R^2}\vec{u}_r$$

$$\vec{v}_{M/\mathcal{R}} = R\omega\vec{u}_\theta = \sqrt{\mathcal{G}\frac{M_T}{R}}\vec{u}_\theta$$

L'expression du vecteur position a déjà été donnée plus haut :

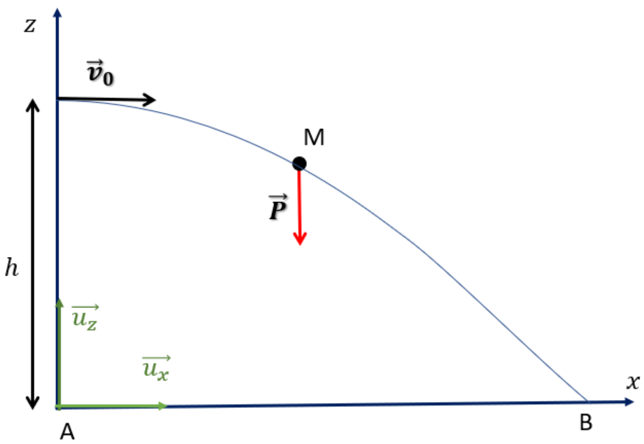
$$\overrightarrow{OM} = R \cdot \vec{u}_r$$

7. Quelle est l'orientation du vecteur accélération ?

Le vecteur accélération est centripète, c'est-à-dire dirigé vers le centre de la Terre.

Exercice 5 : Chute libre depuis un avion

Un avion humanitaire vole à une altitude $h = 5000\ \mathrm{m}$ à la vitesse $v = 750\ \mathrm{km \cdot h^{-1}}$. Il largue un colis de nourriture et de médicaments, de masse m, lorsqu'il passe à la verticale du point A. On considèrera le colis comme un point matériel M.



1. Déterminer l'équation du mouvement du point M.

Il s'agit ici d'un problème classique de chute libre, le colis n'est soumis qu'à son poids. Le mouvement de l'avion permet simplement d'avoir les conditions initiales.

Système étudié : point matériel M

Référentiel : terrestre, auquel on associe une base cartésienne 2D (x,z) ; ce référentiel peut être supposé galiléen dans les conditions de l'exercice.

Vecteur position dans la base, et dérivées temporelles pour obtenir $\vec{v}$ et $\vec{a}$ (c'est surtout le vecteur accélération) qui nous intéresse pour appliquer le PFD :

$$\overrightarrow{OM} = x \cdot \vec{u}_x + z \cdot \vec{u}_z$$

$$\vec{v} = \dot{x} \cdot \vec{u}_x + \dot{z} \cdot \vec{u}_z$$

$$\vec{a} = \ddot{x} \cdot \vec{u}_x + \ddot{z} \cdot \vec{u}_z$$

Bilan des forces : seul le poids agit sur le colis (on néglige ici les frottements de l'air)

$$\vec{P} = m\vec{g} = -mg \cdot \vec{u}_z$$

PFD :

$$m\vec{a} = \vec{P}$$

Soit :

$$m\ddot{x} \cdot \vec{u}_x + m\ddot{z} \cdot \vec{u}_z = -mg \cdot \vec{u}_z$$

Par projection sur les vecteurs de base on obtient les équations du mouvement :

$$\begin{cases} \ddot{x} = 0 \\ \ddot{z} = -g \end{cases}$$

2. Quel est le temps mis par le point M pour toucher le sol ?

Pour répondre à la question il suffit d'obtenir les équations horaires par intégration des équations du mouvement et en tenant compte des conditions initiales :

$$\begin{cases} \dot{x} = cte = v_{0x} = v_0 \\ \dot{z} = -gt + v_{0z} = -gt \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = v_0 t + x_0 = v_0 t \\ z = -\dfrac{1}{2}gt^2 + z_0 = -\dfrac{1}{2}gt^2 + h \end{cases}$$

Le colis touche le sol au temps t_1 tel que z=0 soit : $-\frac{1}{2}gt_1^2 + h = 0$

On a donc l'équation classique (utilisée en TP) :

$$t_1 = \sqrt{\frac{2h}{g}} = 32\ s$$

3. Quelle est la distance parcourue par l'avion pendant ce temps ?

L'avion a une vitesse constante $v = 750\ \mathrm{km \cdot h^{-1}} = 208{,}3\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$

La distance parcourue est donc $d = v \cdot t_1 = 6{,}65\ km$

4. À quelle distance du point A se trouve le colis lorsqu'il touche le sol ?

Soit B le point d'impact du colis. On a $z_B = 0$ et on cherche la distance AB c'est-à-dire x_b :

$$x = v_0 t_1 = 6{,}65\ km$$

Cela n'a rien d'étonnant. On aurait pu étudier le problème dans un référentiel lié à l'avion. Celui-ci ayant un mouvement rectiligne uniforme, le référentiel considéré serait galiléen. Le colis largué par rapport à l'avion, et sans tenir compte des frottements, tombe à la verticale de celui-ci.

5. Que se passe-t-il qualitativement si l'avion a une trajectoire inclinée vers le bas d'un angle $\beta = 10°$ par rapport à la verticale ?

L'angle est en réalité de 10° par rapport à l'horizontale !! Le problème a ici peu de sens, mais nous le résolvons avec les données de l'énoncé (donc $\beta = 10°$ par rapport à la verticale).

La seule modification à réaliser est que dans les conditions initiales on a :

$$\begin{cases} \dot{x}_0 = v_{0x} = v_0 \sin\beta \\ \dot{z}_0 = v_{0z} = -v_0 \cos\beta \end{cases}$$

La réponse demandée est simplement qualitative : on peut tracer la nouvelle trajectoire en tenant compte de cette vitesse initiale, et constater que la distance AB sera plus courte.

6. À quelle hauteur devrait alors se trouver l'avion pour que le colis tombe à moins de 100 m du point A ?

On utilise les conditions initiales ci-dessus et on remplace dans les équations horaires :

$$\begin{cases} \dot{x} = v_{0x} = v_0 \sin\beta \\ \dot{z} = -gt + v_{0z} = -gt - v_0 \cos\beta \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = v_0 \sin\beta\, t \\ z = -\dfrac{1}{2}gt^2 - v_0 \cos\beta\, t + h \end{cases}$$

On veut :

$$x_B < 100$$

Soit :

$$v_0 \sin\beta\, t_1 < 100$$

Or

$$z_B = -\frac{1}{2}gt_1^2 - v_0 \cos\beta\, t_1 + h = 0$$

Donc :

$$h = \frac{1}{2}gt_1^2 + v_0 \cos\beta\, t_1$$

Il en résulte que pour répondre aux conditions demandées il faut :

$$h < \frac{1}{2}g\left(\frac{100}{v_0 \sin\beta}\right)^2 + v_0 \cos\beta\left(\frac{100}{v_0 \sin\beta}\right)$$

Numériquement :

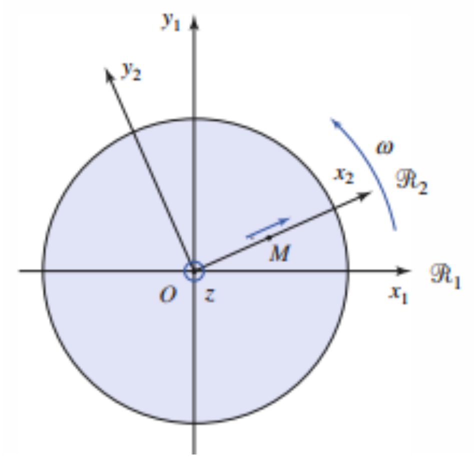
$$h < 604\, m$$

Le calcul est exactement le même s'il on a pris l'angle par rapport à l'horizontale (on remplace β par 80°)

$$h < 18\, m$$

Exercice 6 : Mouvement radial sur un plateau tournant

Soit un plateau horizontal (manège par exemple) tournant avec une vitesse angulaire ω autour d'un axe vertical fixe (Oz). $\mathcal{R}_1$ est le référentiel terrestre et $\mathcal{R}_2$ le référentiel lié au plateau.



Un mobile de position M décrit à vitesse constante $\vec{v}$ l'axe (Ox_2) lié à $\mathcal{R}_2$.

Exprimer $\vec{v}(M)_{/\mathcal{R}_1}$ et $\vec{a}(M)_{/\mathcal{R}_1}$ dans la base $(\vec{e}_{x2}, \vec{e}_{y2})$.

Comme M est lié à la base $\mathcal{R}_2$ il paraît plus simple de d'abord étudier son mouvement dans cette base, puis d'utiliser les lois de changements de référentiel pour déterminer son mouvement dans $\mathcal{R}_1$ comme demandé.

- **Etude du mouvement de M dans $\mathcal{R}_2$**

Le point est toujours situé sur l'axe (Ox_2), on a donc :

$$\overrightarrow{OM} = x_2\vec{e}_{x2}$$

Pour déterminer la vitesse et l'accélération, nous allons travailler dans le référentiel $\mathcal{R}_2$ **où les vecteurs $(\vec{e}_{x2}, \vec{e}_{y2})$ sont fixes !**

$$\vec{v}(M)_{/\mathcal{R}_2} = \dot{x}_2\vec{e}_{x2} = v\vec{e}_{x2}$$

$$\vec{a}(M)_{/\mathcal{R}_2} = \ddot{x}_2\vec{e}_{x2} = \vec{0}$$

L'accélération est nulle car la vitesse v est constante.

- **Changement de base**

$$\vec{v}(M)_{/\mathcal{R}_1} = \vec{v}_r + \vec{v}_e = \vec{v}(M)_{/\mathcal{R}_2} + \left[\vec{v}(O)_{/\mathcal{R}_1} + \vec{\Omega}_{\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1} \wedge \overrightarrow{OM}\right]$$

Avec : $\vec{\Omega}_{\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1} = \omega\vec{e}_z$

L'origine des deux bases est confondue on a donc : $\vec{v}(O)_{/\mathcal{R}_1} = \vec{0}$

Finalement, on peut exprimer $\vec{v}(M)_{/\mathcal{R}_1}$ avec tous les résultats obtenus précédemment :

$$\vec{v}(M)_{/\mathcal{R}_1} = v\vec{e}_{x2} + \omega\vec{e}_z \wedge x_2\vec{e}_{x2}$$

Finalement :

$$\boldsymbol{\vec{v}(M)_{/\mathcal{R}_1} = v\vec{e}_{x2} + x_2\omega\vec{e}_{y2}}$$

Remarque : on aurait pu rapidement trouver le deuxième terme à partir de la notion de point coïncident. Ici il s'agit d'un point décrivant un cercle de rayon x_2 à vitesse constante ω.

L'accélération se compose de trois termes :

$$\vec{a}(M)_{/\mathcal{R}_1} = \vec{a}_r + \vec{a}_e + \vec{a}_c$$

Avec :

$\vec{a}_r = \vec{a}(M)_{/\mathcal{R}_2} = \ddot{x}_2\vec{e}_{x2} = \vec{0}$ car la vitesse de M sur l'axe (Ox2) est constante.

$\vec{a}_e$ est l'accélération d'entraînement. La formule de ce terme est complexe, mieux vaut ici utiliser le point coïncident en remarquant toujours qu'il décrit une trajectoire circulaire de rayon x_2 (attention la vitesse angulaire ω n'est pas forcément constante !). Ce terme peut s'obtenir en dérivant la vitesse d'entraînement dans R1 :

$$\vec{a}_e = -x_2\omega^2\vec{e}_{x2} + x_2\dot{\omega}\vec{e}_{y2}$$

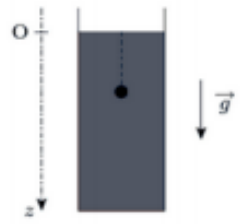
L'accélération de Coriolis, enfin, se calcule comme suit :

$$\vec{a}_c = 2\vec{\Omega}_{\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1} \wedge \vec{v}(M)_{/\mathcal{R}_2} = 2\omega\vec{e}_z \wedge v\vec{e}_{x2} = 2\omega v\vec{e}_{y2}$$

Finalement :

$$\boldsymbol{\vec{a}(M)_{/\mathcal{R}_1} = -x_2\omega^2\vec{e}_{x2} + (2\omega v + x_2\dot{\omega})\vec{e}_{y2}}$$

Exercice 7 : Mesure de la viscosité d'un fluide



A $t = 0$ une bille d'acier de masse volumique $\rho = 7800\ \mathrm{kg \cdot m^{-3}}$ et de rayon $r = 5\ \mathrm{mm}$ est déposée sans vitesse initiale à la surface d'un tube rempli de glycérine. La glycérine est un fluide visqueux de masse volumique $\rho_0 = 1260\ \mathrm{kg \cdot m^{-3}}$. On définit sa viscosité η par l'expression de la force de frottement $\vec{f}$ qu'elle exerce sur la bille quand celle-ci est en mouvement à la vitesse $\vec{v}$:

$$\vec{f} = -6\pi\eta r\vec{v}$$

La position de la bille est repérée par la coordonnée $z(t)$ mesurée à l'instant t sur l'axe Oz descendant fixe dans le référentiel d'étude, supposé galiléen. Le champ de pesanteur supposé constant a pour module $g = 9{,}8\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$.

1. Montrer que le vecteur $\vec{v}$ vérifie l'équation différentielle suivante :

$$\frac{d\vec{v}}{dt} + \alpha\vec{v} = \beta\vec{g}$$

Où on déterminera α et β en fonction des données du problème.

Système : bille ; le référentiel du laboratoire est supposé galiléen.

Bilan des forces :

- Poids : $\vec{P} = mg.\vec{u}_z = \rho Vg.\vec{u}_z$ (l'axe vertical est descendant sur le schéma de l'exercice)
- Poussée d'Archimède : $\vec{F}_A = -\rho_0 Vg.\vec{u}_z$ (force ascendante correspondant au poids du liquide déplacé, c'est-à-dire qui occuperait le volume de la bille si elle n'était pas là)
- Force de frottement : $\vec{f} = -6\pi\eta r\vec{v}$

On applique le PFD à la bille :

$$m\vec{a} = \vec{P} + \vec{F}_A + \vec{f}$$

Soit :

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = \rho V\vec{g} - \rho_0 V\vec{g} - 6\pi\eta r\vec{v}$$

On réécrit l'équation sous la forme demandée :

$$\frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{6\pi\eta r}{m}\vec{v} = \frac{(\rho - \rho_0)V}{m}\vec{g}$$

2. Montrer que la bille va atteindre une vitesse limite d'expression suivante :

$$v_{lim} = \frac{2(\rho - \rho_0)gr^2}{9\eta}$$

La vitesse initiale étant nulle, le mouvement de la bille est descendant, avec une accélération positive : $\vec{v}$ augmente et par conséquent la force de frottements, donc l'accélération diminue. Celle-ci finit par s'annuler lorsque :

$$\frac{6\pi\eta r}{m}\vec{v} = \frac{(\rho - \rho_0)V}{m}\vec{g}$$

Il s'agit en réalité du régime permanent, obtenu simplement par annulation de la dérivée temporelle.

Le volume d'une sphère de rayon r s'écrit : $V = \frac{4}{3}\pi r^3$

En projetant sur l'axe on obtient :

$$\frac{6\pi\eta r}{m}v_{\text{lim}} = \frac{(\rho - \rho_0)\frac{4}{3}\pi r^3}{m}g$$

Que l'on simplifie :

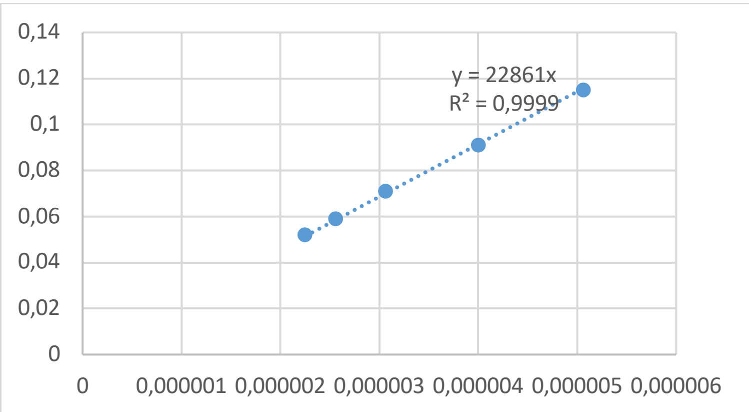
$$v_{lim} = \frac{2(\rho - \rho_0)gr^2}{9\eta}$$

3. On mesure pour différentes valeurs de r la vitesse limite de la bille. Les mesures sont présentées dans le tableau ci-dessous. En déduire la valeur de la viscosité η de la glycérine. Conclure.

r (mm)	1,50	1,60	1,75	2,00	2,25
v_{lim} (cm.s^{-1})	5,2	5,9	7,1	9,1	11,5

Il suffit de réaliser une régression linéaire en utilisant comme réponse la vitesse limite et comme prédicteur r^2.

On obtient :



Il vient que : $\frac{2(\rho-\rho_0)g}{9\eta} = 228610$

On a donc : $\eta = \frac{2(\rho-\rho_0)g}{9\times 228610}$ =0,62 Pa.s

4. Donner l'expression de la constante de temps τ avec laquelle le mouvement permanent s'établit. Faire l'application numérique pour $r = 1{,}50$ mm. Commenter.

$$\frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{6\pi\eta r}{m}\vec{v} = \frac{(\rho - \rho_0)V}{m}\vec{g}$$

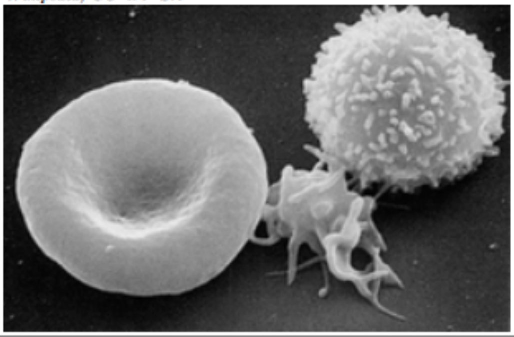
La constante de temps est donc : $\tau = \frac{m}{6\pi\eta r} = \frac{2\rho r^2}{9\eta} = 6{,}25\ ms$

On peut donc supposer le régime permanent atteint dès le début, ce qui justifie d'utiliser l'équation de la vitesse limite pour calculer la viscosité.

Exercice 8 : Résolution de problème – sédimentation du plasma sanguin

La vitesse de sédimentation fait partie des examens de routine effectués au cours d'un bilan sanguin permettant de détecter des phénomènes inflammatoires ou infectieux. La vitesse de sédimentation à la première heure correspond à la hauteur (en mm) de globules rouges ayant sédimenté en une heure au fond d'un tube à essai, le sang ayant été rendu incoagulable. Déterminer la fourchette dans laquelle doit se trouver la vitesse de sédimentation à la première heure d'un sang sain.

Document 1 – Érythrocyte, thrombocyte, leucocyte
Wikipedia, CC–BY–SA



Document 2 – Propriétés biologiques

Cellules	Dimension	Quantité (10^3/mm^3)
Erythrocyte (globule rouge)	$6.8\mu m$ à $7.3\mu m$	4600 à 6000
Thrombocyte (plaquette)	$2\mu m$ à $4\mu m$	150 à 450
Leucocyte (globule blanc)	$4\mu m$ à $12\mu m$	4 à 10

Le globule rouge est modélisé par un cylindre de hauteur égale au $1/5^{\text{ème}}$ de son diamètre.

Document 3 – Force de frottement.
Un objet sphérique en mouvement à une vitesse de norme v subit une force de frottement fluide, deux modèles existent

- le modèle de Stokes $\vec{f} = -6\pi\eta R\vec{v}$;
- le modèle quadratique $\vec{f} = -\frac{1}{2}\rho\pi R^2 C_x v\vec{v}$;

avec R le rayon de l'objet, ρ la masse volumique du fluide, η la viscosité du fluide, C_x le coefficient de trainée ($C_x = 0.5$ pour une sphère).

Document 4 – Nombre de Reynolds R_e
Le modèle de frottement adapté à une situation est déterminé à l'aide d'un paramètre sans dimension, le nombre de Reynolds

$$R_e = \rho L v/\eta\,;$$

avec ρ la masse volumique du fluide, L dimension caractéristique de l'objet, v vitesse de l'objet et η viscosité du fluide.
On admettra que le modèle de Stokes est acceptable si $R_e \leq 10$ et que le modèle quadratique est acceptable si $R_e \geq 10^3$.

Document 5 – Données numériques

- hauteur d'un tube à essais 70 mm
- diamètre d'un tube à essais 12 mm
- accélération de pesanteur 9.81 m s^{-2}
- masse volumique du plasma sanguin 1.0×10^3 kg m^{-3}
- masse volumique des globules rouges 1.3×10^3 kg m^{-3}
- viscosité dynamique du plasma sanguin 1.6×10^{-3} uSI

La Vitesse de Sédimentation recherchée n'est pas une vitesse mais une hauteur. On peut cependant exprimer cette grandeur en mm/h (puisqu'il s'agit de la hauteur de globules rouges ayant sédimenté en une heure), ce qui justifie son appellation.

Les globules rouges forment, en volume, d'après le Doc. 2, approximativement 95 % des éléments figurés. En conséquence, dans la suite, on ne prendra en considération que ce type de particule, à l'exclusion des deux autres.

Lorsque le sang est laissé au repos dans une éprouvette, les globules sédimentent, c'est-à-dire s'accumulent au fond du tube à essais. Le sang se comporte donc comme un fluide (le plasma, très proche de l'eau en termes de composition) contenant des éléments solides réparti initialement de manière homogène. Dans ce milieu fluide, les globules subiront une force de frottement $\vec{f}$.

Il faut déterminer le mouvement des globules afin de déterminer la hauteur de globules se trouvant au fond du tube à essais.

L'étude mathématique se ramène à l'exercice précédent :

$$\frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{6\pi\eta R}{m}\vec{v} = \frac{(\rho - \rho_0)V}{m}\vec{g}$$

$$v_{lim} = \frac{(\rho - \rho_0)gV}{6\pi\eta R}$$

Il est alors nécessaire d'évaluer le volume et le rayon du globule :

Sur le Doc. 1, on peut constater qu'il a approximativement la forme d'un cylindre évidé. La dimension d'un globule rouge donné dans le tableau (Doc 2) fournit une échelle. Il est alors possible de considérer le globule rouge comme un cylindre dont on peut évaluer les dimensions sur le Doc. 1 :

- Rayon : 3,5 μm
- Volume : difficile à calculer, on peut utiliser différentes méthodes pour l'évaluer.
  La meilleure formule est : $V = \left(\pi R_e^2 - \pi R_i^2\right) H = 40\ \mu m^3$

Note : on peut déterminer avec le nombre de Reynolds qu'on a bien choisi la bonne expression pour la force de frottements. Nous ne détaillons pas ici.

On a donc :

$$v_{lim} = 1{,}8 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-1} = 6\ mm/h$$

Donc en une heure les globules se déplaceront au maximum de 6 mm.

Comment évaluer la hauteur de sédimentation : en une heure les globules situés à une distance inférieure ou égale à 6 mm du fond du tube vont s'accumuler et occuper un certain volume Vocc :

$$V_{occ} = H \cdot S$$

Où H est la hauteur de sédimentation recherchée et S la section du tube. Mais ce volume est aussi lié au nombre de globules dans la zone considérée : en considérant qu'il vont s'empiler de manière compacte il sera égal à nV où V est le volume d'un globule et n le nombre de globule dans la zone considérée.

Le sujet indique qu'un sang sain contient entre 4,5 et $6{,}0.10^6$ globules par mm^3. On en déduit la hauteur H : elle doit être comprise entre 3,7 et 4,9 mm.