Colle sur le chapitre n°1 « Logique »

A lire, avant de commencer.

A la prépa des INP, il n'y a pas de concours à préparer, donc pas d'oraux, et par conséquent, pas de colles (c'est une interrogation orale d'une heure hebdomadaire dans les « prépas classiques »).

Toutefois, cela n'empêche pas de produire un travail personnel et autonome.

Ces fiches intitulées « Colles » couvriront l'ensemble de l'année et permettront un travail complémentaire à l'apprentissage du cours, aux feuilles d'exercices, aux DM, et seront idéales pour vérifier la bonne compréhension des chapitres avant un DS…

<u>En vrac</u>

1) Vrai ou Faux ?
   a) On a : $\forall x < 2, x^2 < 4$
   b) On a : $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 = 4 \Leftrightarrow x = 2$
   c) Pour tout n$\in \mathbb{N}$, n(n+1) est pair
   d) On a : $\exists n \in \mathbb{Z}, \forall x \in \mathbb{R}, x \leq n$
2) Quelle est la négation de la proposition : « La nuit, tous les chats sont gris » ?
3) Quelle est la réciproque de : « La nuit, tous les chats sont gris » ?
4) Quelle est la contraposée de : «La nuit, tous les chats sont gris » ?

<u>Exercice n°1</u>

Traduire chacune des propositions par une phrase en français, préciser si elle est vraie ou fausse, et lorsqu'elle est fausse, écrire sa négation à l'aide de quantificateurs :

1) Proposition 1 : $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x + y > 0$
2) Proposition 2 : $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x + y > 0$
3) Proposition 3 : $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x + y > 0$
4) Proposition 4 : $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x + y > 0$

<u>Exercice n°2</u>

On considère les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par $a_0 = 1 \ et \ b_0 = 0$, de plus $\forall n \in \mathbb{N}$,
$$\begin{cases} a_{n+1} = a_n + 2b_n \\ b_{n+1} = a_n + b_n \end{cases}$$

1) Montrer que pour tout entier n, $(1 + \sqrt{2})^n = a_n + b_n\sqrt{2}$
2) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, a_n \ et \ b_n$ sont des entiers naturels
3) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, a_n^2 - 2b_n^2 = (-1)^n$

<u>Exercice n°3</u>

Montrer que pour tout entier naturel n :[n est un multiple de 6] $\Leftrightarrow$ [n est un multiple de 3 et est pair]

<u>Exercice n°4</u>

Soient A,B et C 3 ensembles

1) Etablir que : $(A \cup B = B \cap C) \Leftrightarrow (A \subset B \subset C)$
2) Etablir par contraposition que : $B \neq C \Rightarrow (A \cap B \neq A \cap C \ ou \ A \cup B \neq A \cup C)$

<u>Problème:</u> L'objectif de cet exercice est de déterminer l'ensemble des fonctions f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui vérifient: $\forall x\in \mathbb{R}$, *f(x) +xf(1−x) = 1 +x* (E_1)

1) Soit f une fonction solution, c'est-à-dire une fonction qui vérifie (E_1).

a)Déterminer f(0), puis f($\frac{1}{2}$).

b)Montrer que pour tout x$\in \mathbb{R}$, $f(1-x) + (1-x)f(x) = 2-x$. On note cette égalité (E_2).

c)A l'aide (E_1) et (E_2), déterminer une expression de f(x) valable pour tout x$\in \mathbb{R}$.

2) Conclure.

3) Comment s'appelle ce type de raisonnement mené ?