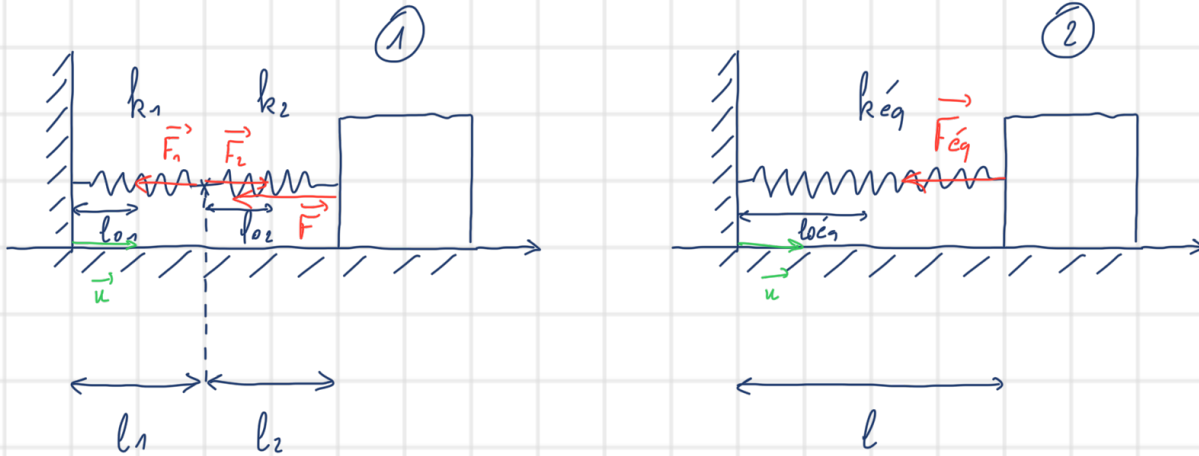


TD 6 Dynamique du point

Ex 1

1° Ressorts en série

Schéma :



① Force de rappel que subit le solide :

$\vec{F} = - \vec{F}_2$ (car quand le ressort est allongé d'une certaine grandeur algébrique, chaque extrémité du ressort est soumise à une force de rappel et ces forces sont égales en normes mais de sens opposés.)

$$\vec{F} = - [- k_2 (l_2 - l_{02}) (-\vec{u})] = - k_2 (l_2 - l_{02}) \vec{u}$$

② Force de rappel que subit le solide (ressort unique équivalent)

$$\vec{F}_{eq} = - k_{eq} (l - l_{0eq}) \vec{u}$$

On impose l'égalité $\vec{F}_{eq} = \vec{F}$

$$- k_{eq} (l - l_{0eq}) \vec{u} = - k_2 (l_2 - l_{02}) \vec{u}$$

$$k_{\text{eq}} (l - l_{\text{eq}}) = k_2 (l_2 - l_{02})$$

on sait que $l = l_1 + l_2$ et $\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$

$$-k_1 (l_1 - l_{01}) \vec{u} = -k_2 (l_2 - l_{02}) \vec{u}$$

$$-k_1 l_1 + k_1 l_{01} = -k_2 l_2 + k_2 l_{02}$$

$$k_1 l_1 = k_1 l_{01} + k_2 l_2 - k_2 l_{02}$$

$$l_1 = l_{01} + \frac{k_2}{k_1} (l_2 - l_{02})$$

On a donc $l = l_1 + l_2 = l_{01} + \frac{k_2}{k_1} (l_2 - l_{02}) + l_2$

$$l = l_{01} + \frac{k_2}{k_1} l_2 - \frac{k_2}{k_1} l_{02} + l_2$$

$$l_2 \left(\frac{k_2}{k_1} + 1 \right) = l - l_{01} + \frac{k_2}{k_1} l_{02}$$

$$l_2 = \frac{k_1}{k_1 + k_2} \left(l - l_{01} + \frac{k_2}{k_1} l_{02} \right)$$

$$k_{\text{eq}} (l - l_{\text{eq}}) = k_2 (l_2 - l_{02})$$

$$= k_2 \left(\frac{k_1}{k_1 + k_2} \left(l - l_{01} + \frac{k_2}{k_1} l_{02} \right) - l_{02} \right)$$

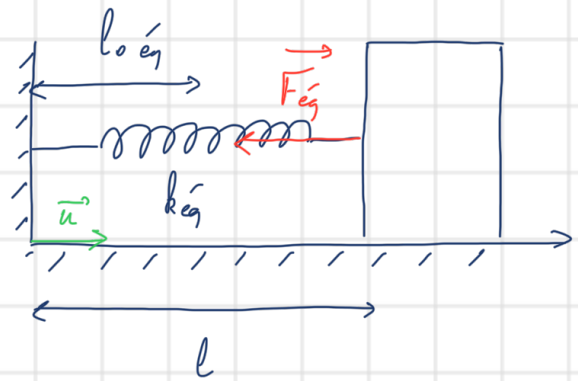
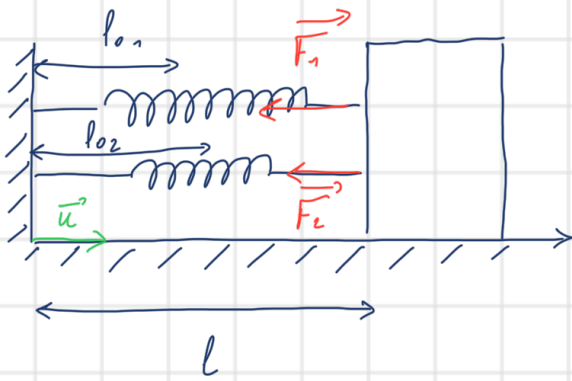
$$= k_2 \left(\frac{k_1}{k_1 + k_2} l - \frac{k_1}{k_1 + k_2} l_{01} + \frac{k_2}{k_1 + k_2} l_{02} - l_{02} \right)$$

$$= \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2} (l - (l_{01} + l_{02}))$$

Par identification : $k_{\text{eq}} = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}$ qui s'écrit aussi $\frac{1}{k_{\text{eq}}} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}$

$$l_{\text{eq}} = l_{01} + l_{02}$$

2° Ressorts en parallèle



Le solide subit une force de rappel $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$

$$\vec{F}_1 = -k_1 \Delta l \vec{u} = -k_1 (l - l_{01}) \vec{u}$$

$$\vec{F}_2 = -k_2 \Delta l \vec{u} = -k_2 (l - l_{02}) \vec{u}$$

$$\text{d'où } \vec{F} = -[k_1 (l - l_{01}) + k_2 (l - l_{02})] \vec{u}$$

Dans le cas d'un ressort unique, le solide subirait la force :

$$\vec{F}_{eq} = -k_{eq} (l - l_{0_{eq}}) \vec{u}$$

$$\vec{F}_{eq} = \vec{F}$$

$$-k_{eq} (l - l_{0_{eq}}) \vec{u} = -[k_1 (l - l_{01}) + k_2 (l - l_{02})] \vec{u}$$

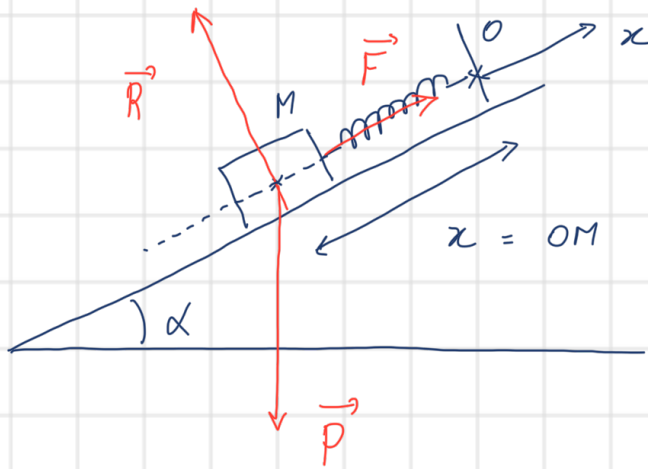
$$k_{eq} (l - l_{0_{eq}}) = k_1 l - k_1 l_{01} + k_2 l - k_2 l_{02}$$

$$k_{eq} (l - l_{0_{eq}}) = (k_1 + k_2) l - k_1 l_{01} - k_2 l_{02}$$

$$k_{eq} (l - l_{0_{eq}}) = (k_1 + k_2) \left(l - \frac{k_1 l_{01} + k_2 l_{02}}{k_1 + k_2} \right)$$

$$\text{Par identification } k_{eq} = k_1 + k_2 \text{ et } l_{0_{eq}} = \frac{k_1 l_{01} + k_2 l_{02}}{k_1 + k_2}$$

3° Masse et ressort sur un plan incliné



À l'équilibre $\vec{P} + \vec{R} + \vec{F} = \vec{0}$

En projection sur Ox : $-mg \sin \alpha + k(x_e - l_0) = 0$

$$x_e = l_0 + \frac{mg \sin \alpha}{k}$$

PFD projeté sur Ox :

$$-m\ddot{x} = -mg \sin \alpha + k(x - l_0)$$

$$m\ddot{x} + kx = kl_0 + mg \sin \alpha$$

$$\begin{aligned} \ddot{x} + \frac{k}{m}x &= \frac{kl_0}{m} + g \sin \alpha \\ &= \frac{k}{m} \left(l_0 + \frac{mg \sin \alpha}{k} \right) \quad \bigg/ = \frac{k}{m} x_e \end{aligned}$$

On pose $y = x - x_e$ et on obtient :

$$\ddot{y} + \omega_0^2 y = 0 \quad \text{éq différentielle d'un oscillateur harmonique}$$

$$\text{avec } \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Solution du type $y(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi)$

Condition initiale : $x(0) = x_0$ donc $y(0) = x_0 - x_e$

$$\dot{x}(0) = 0 \quad \text{donc} \quad \dot{y}(0) = 0$$

$$y(0) = x_0 - x_e = A \cos \varphi$$

$$\dot{y}(0) = 0 = -A\omega_0 \sin \varphi$$

on peut choisir $\varphi = 0$ et on obtient $A = x_0 - x_e$

$$y(t) = x(t) - x_e = (x_0 - x_e) \cos \omega_0 t$$

$$x(t) = x_e + (x_0 - x_e) \cos \omega_0 t$$

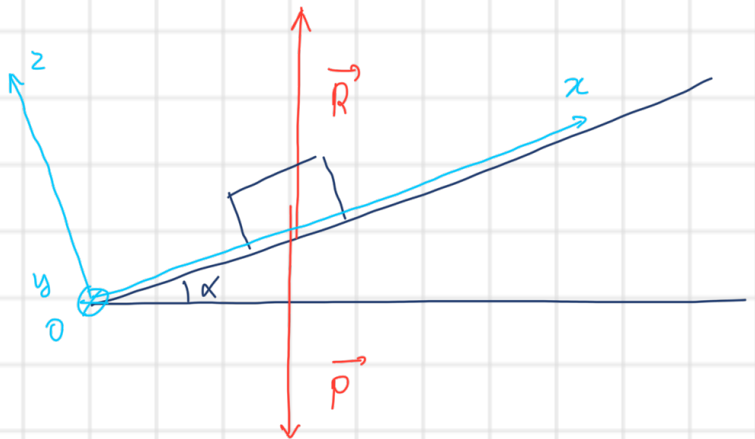
4° Non glissement = équilibre statique

$$\vec{P} + \vec{R} = \vec{0}$$

$$\text{et } \vec{R} = \vec{R}_N + \vec{R}_T$$

$$\text{avec } \vec{R}_N = R_z \vec{u}_z$$

$$\text{et } \vec{R}_T = R_x \vec{u}_x + R_y \vec{u}_y$$



Projection sur la base cartésienne :

$$\left\{ \begin{array}{l} -mg \sin \alpha + R_x = 0 \\ 0 + R_y = 0 \\ -mg \cos \alpha + R_z = 0 \end{array} \right. \quad \text{d'où} \quad \left\{ \begin{array}{l} R_x = mg \sin \alpha \\ R_y = 0 \\ R_z = mg \cos \alpha \end{array} \right.$$

On en déduit $R_N = R_Z = mg \cos \alpha$

et $R_T = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = mg \sin \alpha$

Condition de non glissement : $R_T \leq \mu_s R_N$

$$mg \sin \alpha \leq \mu_s mg \cos \alpha$$

$$\mu_s \geq \tan \alpha$$

Ex 2 : Trajectoire parabolique

1° $\vec{a} \begin{cases} a_x = 0 \\ a_y = -g \end{cases} \quad \vec{v} \begin{cases} v_x = v_0 \cos \alpha \\ v_y = -gt + v_0 \sin \alpha \end{cases}$

$\vec{ON} \begin{cases} x = (v_0 \cos \alpha) t \\ y = -\frac{1}{2} g t^2 + (v_0 \sin \alpha) t \end{cases}$

2° $t = x / v_0 \cos \alpha$ d'où $y(x) = -\frac{1}{2} g \left(\frac{x}{v_0 \cos \alpha} \right)^2 + x \tan \alpha$

3° $0 = -\frac{g x^2}{2 v_0^2 \cos^2 \alpha} + x \tan \alpha$

$x = 0$ ou $x_p = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}$

or $\sin 2\alpha = \sin (\pi - 2\alpha) \Rightarrow$ 2 angles donnent la même portée :

α et $\pi/2 - \alpha$

Flèche : $v_y = 0$ donc $t_F = \frac{v_0 \sin \alpha}{g}$

$y_F = -\frac{1}{2} g \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{g^2} + v_0 \sin \alpha \left(\frac{v_0 \sin \alpha}{g} \right) = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}$

$$\sin^2 2\alpha = 1 \quad \text{d'où} \quad 2\alpha = \frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad \alpha = \frac{\pi}{4} \quad \text{pour une portée max.}$$

4° Parabole de sûreté : on cherche à déterminer l'ensemble des points (x_0, y_0) qu'il est possible d'atteindre pour une vitesse donnée.

$$y_0 = - \frac{g x_0^2}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} + x_0 \tan \alpha$$

$$\text{avec } \frac{1}{\cos^2 \alpha} = 1 + \tan^2 \alpha \quad \text{il vient :}$$

$$y_0 = - \frac{g x_0^2}{2v_0^2} (1 + \tan^2 \alpha) + x_0 \tan \alpha$$

$$y_0 = - \frac{g x_0^2}{2v_0^2} - \frac{g x_0^2}{2v_0^2} \tan^2 \alpha + x_0 \tan \alpha$$

$$\text{on pose } X = \tan \alpha :$$

$$\frac{g x_0^2}{2v_0^2} X^2 + x_0 X + \frac{g x_0^2}{2v_0^2} + y_0 = 0$$

$$\Delta = x_0^2 - 4 \frac{g x_0^2}{2v_0^2} \left(\frac{g x_0^2}{2v_0^2} + y_0 \right) \geq 0$$

$$\text{d'où} \quad y_0 \leq \frac{v_0^2}{2g} - \frac{g x_0^2}{2v_0^2}$$

Un point ne peut donc être atteint que s'il se trouve sous la parabole d'équation :

$$y = - \frac{g}{2v_0^2} x^2 + \frac{v_0^2}{2g}$$

Frottements fluides : $\vec{F} = -\lambda \vec{v}$

1° PFD : $m\vec{a} = \vec{P} + \vec{F}$

$$\vec{a} = \vec{g} - \frac{\lambda}{m} \vec{v}$$

$$\frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{\lambda}{m} \vec{v} = \vec{g}$$

En projection sur les axes :

* $\frac{dv_x}{dt} + \frac{\lambda}{m} v_x = 0$ d'où $v_x = A e^{-\frac{\lambda}{m}t}$

or à $t = 0$ on a $v(0) = v_0 \cos \alpha = A$

donc $v_x(t) = v_0 \cos \alpha e^{-\frac{\lambda}{m}t}$

* $\frac{dv_y}{dt} + \frac{\lambda}{m} v_y = -g$ d'où $v_y(t) = v_y^p + v_y^c(t)$

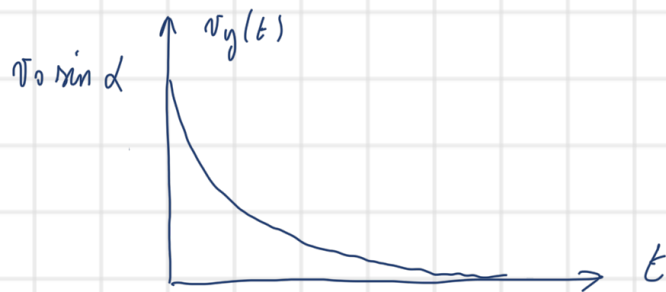
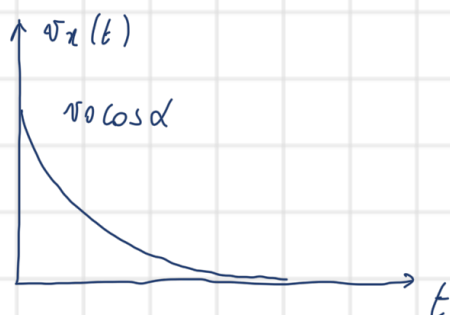
avec $v_y^p = -\frac{mg}{\lambda}$ il vient $v_y(t) = -\frac{mg}{\lambda} + B e^{-\frac{\lambda}{m}t}$

à $t = 0$ on a $v(0) = v_0 \sin \alpha = -\frac{mg}{\lambda} + B$

$$B = v_0 \sin \alpha + \frac{mg}{\lambda}$$

donc $v_y(t) = \left(v_0 \sin \alpha + \frac{mg}{\lambda} \right) e^{-\frac{\lambda}{m}t} - \frac{mg}{\lambda}$

2°



3. Par intégration : $x(t) = - \frac{m v_0 \cos \alpha}{\lambda} e^{-\frac{\lambda}{m} t} + C$

à $t = 0$: $x(0) = 0 = - \frac{m v_0 \cos \alpha}{\lambda} + C$

d'où $C = \frac{m v_0 \cos \alpha}{\lambda}$

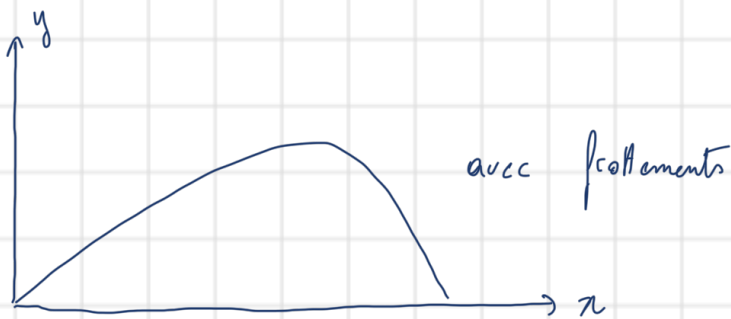
donc $x(t) = \frac{m v_0 \cos \alpha}{\lambda} (1 - e^{-\frac{\lambda}{m} t})$

De même : $y(t) = - \frac{m}{\lambda} (v_0 \sin \alpha + \frac{mg}{\lambda}) e^{-\frac{\lambda}{m} t} - \frac{mg}{\lambda} t + D$

à $t = 0$: $y(0) = 0 = - \frac{m}{\lambda} (v_0 \sin \alpha + \frac{mg}{\lambda}) + D$

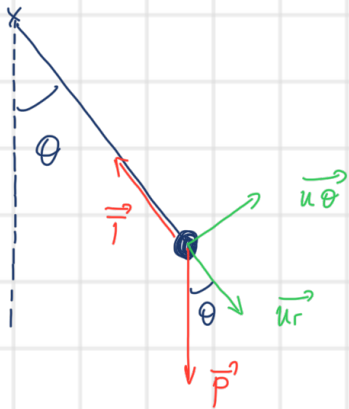
d'où $D = \frac{m}{\lambda} (v_0 \sin \alpha + \frac{mg}{\lambda})$

donc $y(t) = \frac{m}{\lambda} (v_0 \sin \alpha + \frac{mg}{\lambda}) (1 - e^{-\frac{\lambda}{m} t}) - \frac{mg}{\lambda} t$



Ex 3

1.
2.



$$\vec{P} \begin{cases} mg \cos \theta \vec{u}_r \\ - mg \sin \theta \vec{u}_\theta \end{cases}$$

$$\vec{T} \begin{cases} -T \\ 0 \end{cases}$$

$$3^\circ \quad \vec{OM} = l \vec{u}_r \quad / \quad \vec{v} = l \dot{\theta} \vec{u}_\theta \quad / \quad \vec{a} = -l \dot{\theta}^2 \vec{u}_r + l \ddot{\theta} \vec{u}_\theta$$

On projette le PFD sur $\vec{u}_r$ et $\vec{u}_\theta$:

$$\begin{cases} -m l \dot{\theta}^2 = mg \cos \theta - T \\ m l \ddot{\theta} = -mg \sin \theta \end{cases}$$

La 1^{ère} eq permet d'accéder à T si on connaît $\theta(t)$

$$\text{La 2^{ème} eq conduit à : } \ddot{\theta} + \frac{g}{l} \sin \theta = 0$$

$$4^\circ \quad \sin \theta \approx \theta \quad \ddot{\theta} + \frac{g}{l} \theta = 0 \quad \text{oscillateur harmonique}$$

$$5^\circ \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

$$6^\circ \quad \theta(0) = \theta_0 = A \quad \text{et} \quad \dot{\theta}(0) = 0 = B \omega_0 \quad \text{d'où} \quad B = 0$$

$$\theta(t) = \theta_0 \cos \omega_0 t$$