TD 6

Ex 1

1° Durée et distance

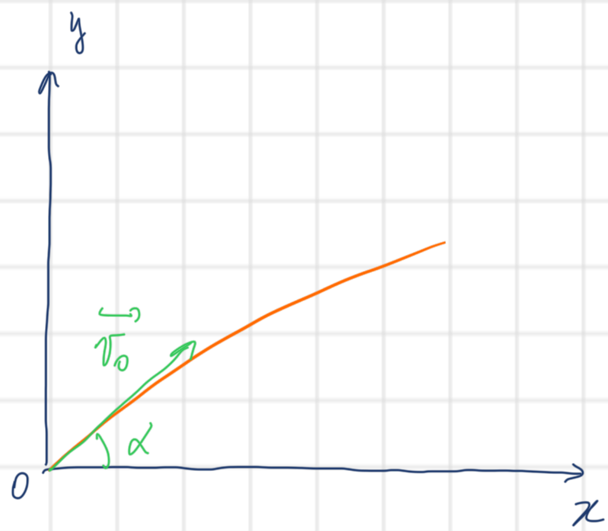
$a = \dfrac{\Delta v}{\Delta t}$ d'où $\Delta t = \dfrac{\Delta v}{a} = 4{,}6$ s

$d = \dfrac{1}{2} a t^2 = 64$ m

2° Virage

$a = \dfrac{v^2}{R}$ d'où $v = 188$ m.s^{-1}

3° Mouvement d'une moto



$\vec{a}(t) \begin{cases} a_x(t) = a_0 \\ a_y(t) = 0 \end{cases}$

$\vec{v}(t) \begin{cases} v_x(t) = a_0 t + v_0 \cos\alpha \\ v_y(t) = v_0 \sin\alpha \end{cases}$

$\vec{OM}(t) \begin{cases} x(t) = 1/2\, a_0 t^2 + (v_0 \cos\alpha) t \\ y(t) = (v_0 \sin\alpha) t \end{cases}$

$t = \dfrac{y}{v_0 \sin\alpha}$ $\qquad x(y) = 1/2\, a_0 \left(\dfrac{y}{v_0 \sin\alpha}\right)^2 + y \operatorname{cotan}\alpha$

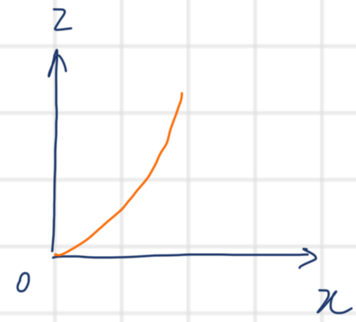
$x(y) = \left(\dfrac{a_0}{2 v_0^2 \sin^2\alpha}\right) y^2 + (\operatorname{cotan}\alpha)\, y$

$\longrightarrow$ Parabole

4° Mouvement d'un ballon sonde

$$\vec{v}(t)\begin{cases} v_x(t) = z(t)/\tau = (v_0/\tau)\,t \\ v_z(t) = v_0 \end{cases}$$

$$\overrightarrow{OM}(t)\begin{cases} x(t) = (v_0/2\tau)\,t^2 \\ z(t) = v_0 t \end{cases}$$



$t = z/v_0$ donc $x(z) = z^2/2v_0\tau$

$\longrightarrow$ Parabole

$$\vec{a}(t)\begin{cases} a_x(t) = v_0/\tau \\ a_z(t) = 0 \end{cases}$$

5° Mouvement parabolique uniforme.

$$\frac{dy}{dt} = \alpha \frac{d(x^2)}{dt}$$

$$v_y = \alpha\, 2x \frac{dx}{dt}$$

$$\boxed{v_y = 2\alpha x v_x}$$

$$\frac{dv_y}{dt} = 2\alpha \frac{d}{dt}(x v_x)$$

$$\boxed{a_y = 2\alpha(v_x^2 + x a_x)}$$

$$v^2 = v_x^2 + v_y^2 = \text{constante}$$

$$\frac{d}{dt}(v_x^2 + v_y^2) = 0$$

$$\cancel{2} v_x \frac{dv_x}{dt} + \cancel{2} v_y \frac{dv_y}{dt} = 0$$

$$\cancel{v_x}\, a_x + 2\alpha x \cancel{v_x}\, a_y = 0$$

$$a_x = -2\alpha x a_y$$

$$a_y = 2\alpha\left(v_x^2 - 2\alpha x^2 a_y\right)$$

$$\boxed{a_y = \frac{2\alpha v_x^2}{1 + 4\alpha^2 x^2}}$$

$$\boxed{a_x = \frac{-4\alpha^2 x\, v_x^2}{1 + 4\alpha^2 x^2}}$$

Au point $O(0;0)$ on a $\left|\begin{array}{l} a_x = 0 \\ a_y = 2\alpha v_x^2 \end{array}\right.$

Ex 2 : Manège

1° r_0 en m et ω en rad.s^{-1}

2° On élimine t entre les deux expressions :

$$x^2/r_0^2 + y^2/r_0^2 = \cos^2 \omega t + \sin^2 \omega t = 1$$

$x^2 + y^2 = r_0^2$ Cercle de centre $O(0;0)$ de rayon r_0

3° $\vec{v}(t) \begin{cases} v_x(t) = -r_0 \omega \sin \omega t \\ v_y(t) = r_0 \omega \cos \omega t \end{cases}$

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = r_0 \omega$$

4° $\vec{a}(t) \begin{cases} a_x(t) = -r_0 \omega^2 \cos \omega t \\ a_y(t) = -r_0 \omega^2 \sin \omega t \end{cases}$

$$\|\vec{a}\| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = r_0 \omega^2$$

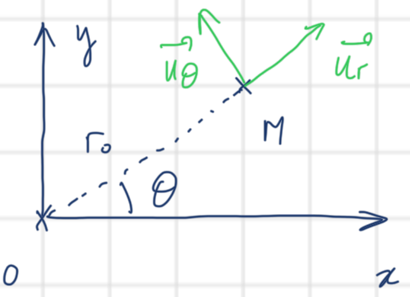
L'accélération est centripète.

5° Si le cercle est centré en (x_0, y_0) il suffit de translater les coordonnées du cercle :

$$x(t) = x_0 + r_0 \cos \omega t$$
$$y(t) = y_0 + r_0 \sin \omega t$$

Ex 3 Manège en coordonnées polaires

1°



$\vec{OM}(t) = r_0 \vec{u_r}$

Rappel : $\vec{u_r} = \cos\theta \, \vec{u_x} + \sin\theta \, \vec{u_y}$
$\vec{u_\theta} = -\sin\theta \, \vec{u_x} + \cos\theta \, \vec{u_y}$

$$\frac{d\vec{u_r}}{d\theta} = -\sin\theta \, \vec{u_x} + \cos\theta \, \vec{u_y} = \vec{u_\theta} \qquad \frac{d\vec{u_r}}{dt} = \frac{d\vec{u_r}}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta}\, \vec{u_\theta}$$

$$\frac{d\vec{u_\theta}}{d\theta} = -\cos\theta \, \vec{u_x} - \sin\theta \, \vec{u_y} = -\vec{u_r} \qquad \frac{d\vec{u_\theta}}{dt} = \frac{d\vec{u_\theta}}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{dt} = -\dot{\theta}\, \vec{u_r}$$

2° $\vec{OM}(t) = r_0 \vec{u_r}$

3° $$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{OM}(t)}{dt} = r_0 \frac{d\vec{u_r}}{dt} = r_0 \dot{\theta} \, \vec{u_\theta}$$

4° $\|\vec{v}\| = r_0 \dot{\theta}$

$m.s^{-1}$ $\quad m \quad s^{-1}$

5° $\vec{v}(t) = \dfrac{dx(t)}{dt}\vec{u_x} + \dfrac{dy(t)}{dt}\vec{u_y}$

$= -r_0 \omega \sin \omega t \,\vec{u_x} + r_0 \omega \cos \omega t \,\vec{u_y}$

$\|\vec{v}\| = r_0 \omega$ donc $\omega = \dot{\theta}$: vitesse angulaire

6° Mouvement circulaire uniforme $\begin{pmatrix} r_0 = \text{constante} \\ \omega = \text{constante} \end{pmatrix}$

7° $\vec{a}(t) = \dfrac{d}{dt}\left(r_0 \dot{\theta}\, \vec{u_\theta}\right) = -r_0 \dot{\theta}^2 \vec{u_r} + \underbrace{r_0 \ddot{\theta}}_{=0 \text{ car } \dot{\theta} \text{ : constante}} \vec{u_\theta}$

$\|\vec{a}\| = r_0 \dot{\theta}^2 = r_0 \omega^2$

$\vec{a}$ vecteur centripète

Ex 4 : Une histoire de dépassement

1° $t \in [0 ; t_1]$

a) $v_a(t) = a_1 t = 2t$ et $x_a(t) = \dfrac{1}{2} a_1 t^2 = t^2$

b) $v_c(t) = v_2 = 10$ et $x_c(t) = v_2 t = 10t$

c) $x_a(6) = 36 \text{ m}$ $\quad (v_a = 12 \text{ m.s}^{-1})$

$x_c(6) = 60 \text{ m}$ $\quad (v_c = 10 \text{ m.s}^{-1})$

2° $t > t_1$

a) $v_a(t) = 12$ et $x_a(t) = 12(t-6) + 36$

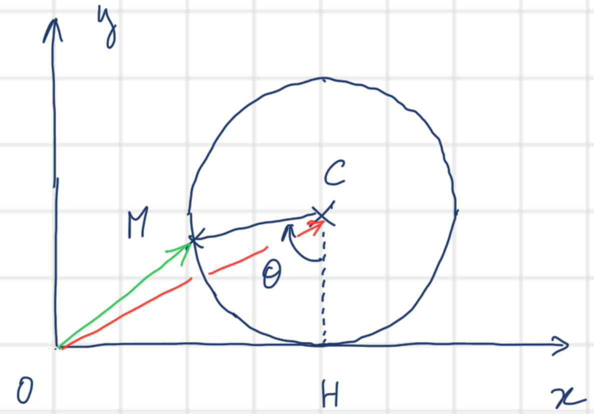
$x_a(t) = 12t - 36$

b) $v_c(t) = 10$ et $x_c(t) = 10t$

c) $12 t_d - 36 = 10 t_d$

$t_d = 18\ s$

d) $x(t_d) = 180\ m$



Ex 5 : Mouvement cycloïdal

1° Le point M décrit une cycloïde.

Le centre C a pour abscisse : $x_C(t) = v_C \times t$ $(= OH)$

Comme le cercle roule sans glisser, son angle de rotation est :

$\theta(t) = \dfrac{v_C \times t}{R}$ $\quad (\overset{\frown}{HM} = R\theta$ et $\overset{\frown}{HM} = OH)$

Le point M, solidaire du cercle, est situé à :

$\overrightarrow{OM}(t) = \overrightarrow{OC}(t) + \overrightarrow{CM}(t)$

or $\overrightarrow{OC}(t) = v_C t\, \overrightarrow{u_x} + R\, \overrightarrow{u_y}$

et $\overrightarrow{CM}(t) = -R \sin\theta\, \overrightarrow{u_x} - R\cos\theta\, \overrightarrow{u_y}$

Vecteur position :

$$\overrightarrow{OM}(t) \begin{cases} x(t) = (v_c t - R\sin\theta) = (v_c t - R\sin v_c t/R) \\ y(t) = R(1-\cos\theta) = R(1-\cos v_c t/R) \end{cases}$$

2° Vecteur vitesse

$$\vec{v}(t) \begin{cases} v_x(t) = v_c(1-\cos v_c t/R) \\ v_y(t) = v_c \sin v_c t/R \end{cases}$$

Vecteur accélération

$$\vec{a}(t) \begin{cases} a_x(t) = v_c^2/R \sin v_c t/R \\ a_y(t) = v_c^2/R \cos v_c t/R \end{cases}$$

3° Courbe obtenue : cycloïde

- M part du sol en $(0;0)$

- décrit une bosse atteignant un maximum en $\theta = \pi = x/R$

$$x = \pi \times R$$

- redescend au sol en $\theta = 2\pi = x/R$

$$x = 2\pi R$$