

$$f \in \mathcal{L}_c(E, F)$$

$$\|f\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|f(x)\|_F$$

$$\times \{x \in E / \|x\| \leq 1\} \supset \{x \in E / \|x\| = 1\}$$

$$\text{Donc } \sup_{\|x\|_E \leq 1} \|f(x)\|_F \geq \sup_{\|x\|_E = 1} \|f(x)\|_F$$

$\times$  Soit soit  $x \in E$  tq  $\|x\|_E \leq 1$ , alors si  $x \in E^\times$ ,  $\frac{x}{\|x\|_E}$  a pour norme 1.

$$\text{Donc } \|f(\frac{x}{\|x\|_E})\|_F \leq \sup_{\|x\|_E = 1} \|f(x)\|_F$$

$$\|f(x)\|_F \leq \sup_{\|x\|_E = 1} \|f(x)\|_F \|x\|_E \leq \sup_{\|x\|_E = 1} \|f(x)\|_F$$

inégalité toujours vraie si  $x = 0$  donc  $\forall x \in E, \|f(x)\|_F \leq \sup_{\|x\|_E = 1} \|f(x)\|_F$

on passe au sup à gauche :

$$\underbrace{\sup_{\|x\|_E \leq 1} \|f(x)\|_F}_{\|f\|} \leq \sup_{\|x\|_E = 1} \|f(x)\|_F \leq \sup_{\|x\|_E = 1} \|f(x)\|_F$$

$$\text{cd : } \boxed{\|f\| = \sup_{\|x\|_E = 1} \|f(x)\|_F}$$

Par la 2<sup>e</sup> égalité :

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \lambda \|f(x)\|_F = \|\lambda f(x)\|_F = \|f(\lambda x)\|_F$$

$$\text{Pour } \lambda = \frac{1}{\|x\|_E} : \frac{1}{\|x\|_E} \|f(x)\|_F = \|f(\frac{x}{\|x\|_E})\|_F$$

$$\text{Donc } \sup_{x \in E^\times} \frac{\|f(x)\|_F}{\|x\|_E} = \sup_{x \in E^\times} \|f(\frac{x}{\|x\|_E})\|_F = \sup_{\|y\|_E \leq 1} \|f(y)\|_F = \|f\|.$$

$$\text{Donc : } \boxed{\|f\| = \sup_{x \in E^\times} \frac{\|f(x)\|_F}{\|x\|_E}}$$