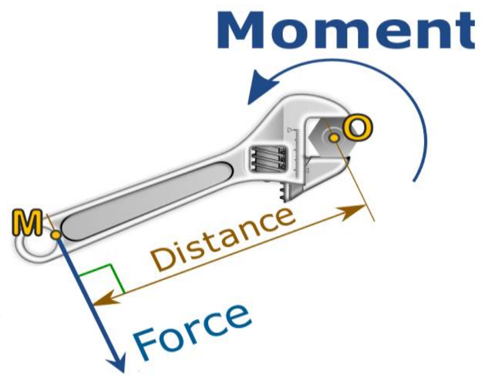
Mécanique 5 – Théorème du moment cinétique

Pour déclencher certains mouvements, le choix d'un bon bras de levier permet une grande économie d'effort : pour monter une roue de secours, mieux vaut une grande croix qu'une petite manivelle ! Archimède disait : "Donnez-moi un point fixe et un levier et je soulèverai la Terre."

Nous verrons dans ce chapitre une nouvelle approche du mouvement, axée sur la rotation. Nous substituerons à l'association force – PFD l'association moment de force – théorème du moment cinétique.

1. Moment d'une force

1.1. Moment en un point

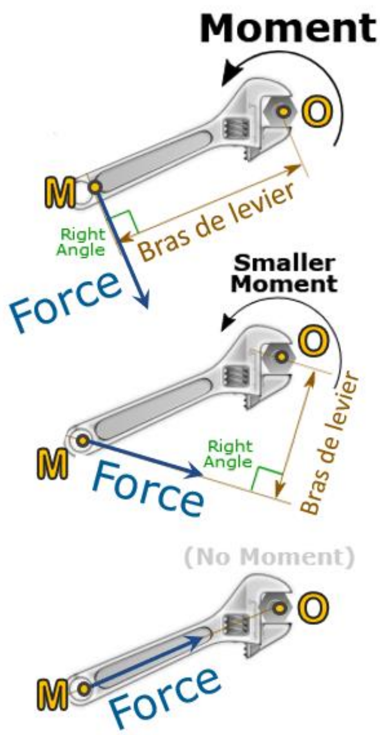


DEFINITION

Le **moment en un point O** de la force $\vec{F}$ appliquée en M est :

$$\vec{M}_{O,\vec{F}} = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F}$$

En particulier, ce moment est nul si le point O appartient à la droite (M, $\vec{F}$). Nous dirons alors que la force appliquée au point M « passe par » le point O.



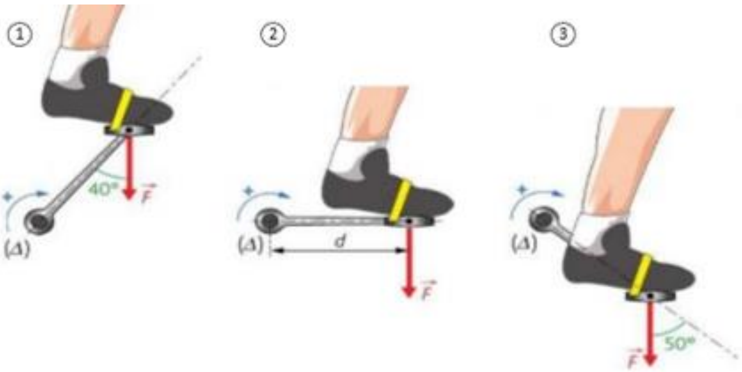
A VOUS DE JOUER

A partir du schéma ci-contre définir la notion de « bras de levier »

Que vaut la norme du moment de la force par rapport à O en fonction de F et du bras de levier (on le notera d) ?

Dans le troisième cas, que vaut le bras de levier ? Que vaut le moment ?

A VOUS DE JOUER : La bonne façon de pédaler !



Le pédalage représenté ci-dessus vous paraît-il efficace ? Pourquoi ?

Indiquer par des flèches la direction de la force à appliquer sur la pédale pour un mouvement plus efficace.

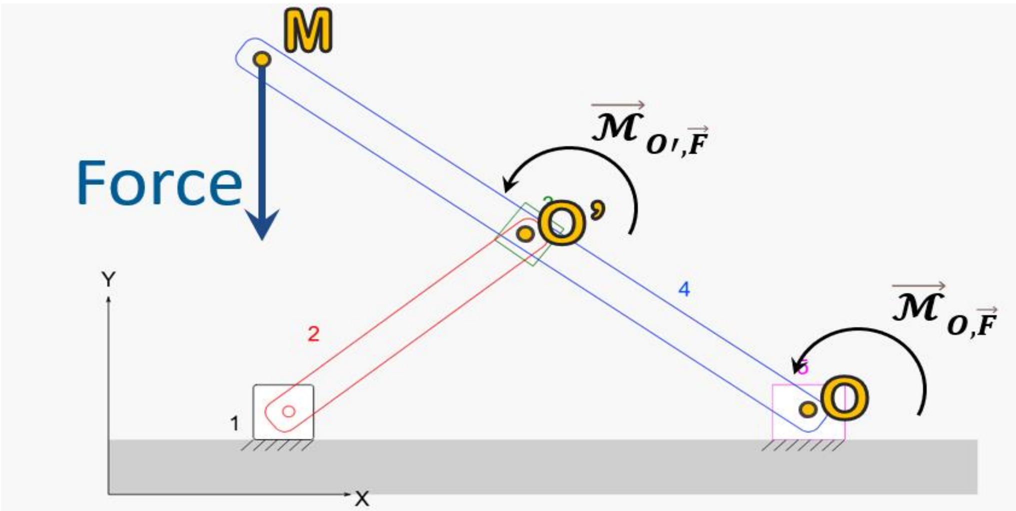
Loi de transport du moment d'une force

Il est facile, connaissant $\vec{\mathcal{M}}_{O,\vec{F}}$ de déterminer le moment de la force par rapport à un autre point O' :

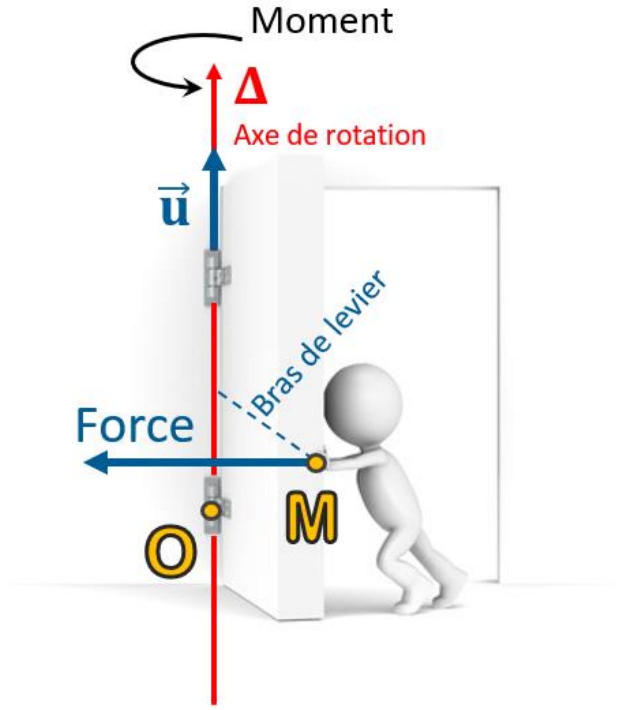
$$\vec{\mathcal{M}}_{O',\vec{F}} = \overrightarrow{O'M} \wedge \vec{F} = \left(\overrightarrow{O'O} + \overrightarrow{OM}\right) \wedge \vec{F}$$

Soit :

$$\boxed{\vec{\mathcal{M}}_{O',\vec{F}} = \vec{\mathcal{M}}_{O,\vec{F}} + \overrightarrow{O'O} \wedge \vec{F}}$$



1.2. Moment par rapport à un axe



DEFINITION

Soit Δ un axe passant par O, orienté selon la direction de son vecteur unitaire $\vec{u}$. Le **moment de la force $\vec{F}$ par rapport à l'axe Δ orienté** est une grandeur scalaire définie par :

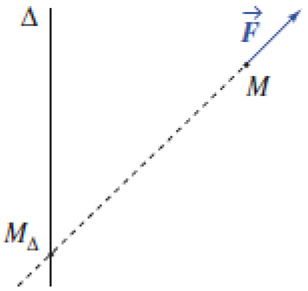
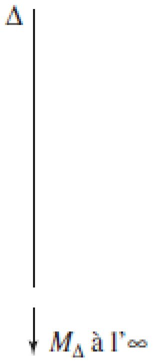
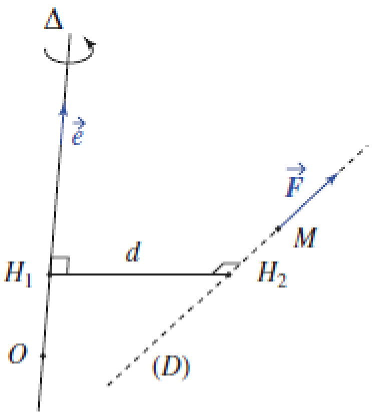
$$\mathcal{M}_{\Delta,\vec{F}} = \overrightarrow{\mathcal{M}}_{O,\vec{F}} \cdot \vec{u}$$

Remarque : le produit scalaire a la même valeur pour tout point O de Δ.

A VOUS DE JOUER

Démontrer la remarque précédente.

Plusieurs cas de figures doivent être précisés :

	**Force « passant » par l'axe Δ** On dit que la force $\vec{F}$, appliquée au point M, « passe » par l'axe Δ si la droite (M, $\vec{F}$) possède un point d'intersection M_Δ avec Δ. Le moment de la force par rapport à l'axe est alors nul : $$\boldsymbol{\mathcal{M}_{\Delta,\vec{F}}} = \mathbf{0}$$
	**Force parallèle à l'axe Δ** A la limite, le point M_Δ peut être renvoyé à l'infini, ce qui se produit lorsque la force exercée au point M est parallèle à l'axe Δ. Dans ce cas, le moment de la force par rapport à l'axe est nul également : $$\boldsymbol{\mathcal{M}_{\Delta,\vec{F}}} = \mathbf{0}$$
	**Force orthogonale à l'axe Δ** Soit une force $\vec{F}$ orthogonale à Δ appliquée en M et D la droite colinéaire à $\vec{F}$ passant par M. Notons d la longueur du segment H_1H_2, appelé **bras de levier**, de la perpendiculaire commune à Δ et D. On a alors : $$\mathcal{M}_{\Delta,\vec{F}} = \left(\overrightarrow{H_1M} \wedge \vec{F}\right) \cdot \vec{u} = \left(\overrightarrow{H_1H_2} \wedge \vec{F}\right) \cdot \vec{u}$$ Nous pouvons donc retenir la règle de calcul : ▪ $\left\lvert\mathcal{M}_{\Delta,\vec{F}}\right\rvert = Fd$ ▪ $\mathcal{M}_{\Delta,\vec{F}} > 0$ si $\vec{F}$ « fait tourner » M autour de Δ dans le sens positif ▪ $\mathcal{M}_{\Delta,\vec{F}} < 0$ dans le cas contraire

Remarque

Cette règle de calcul peut s'appliquer à une force quelconque en décomposant celle-ci en une force parallèle à Δ et une force orthogonale à Δ.

2. Moment cinétique

2.1. Moment cinétique en un point

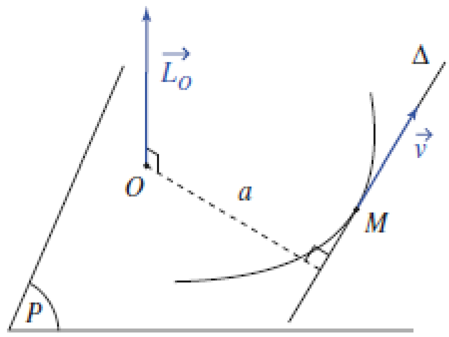
DEFINITION

Le moment cinétique en O dans le référentiel $\mathcal{R}$ du point matériel M de masse m est :

$$\vec{L}_{O/\mathcal{R}}(M) = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{p} = m\overrightarrow{OM} \wedge \vec{v}$$

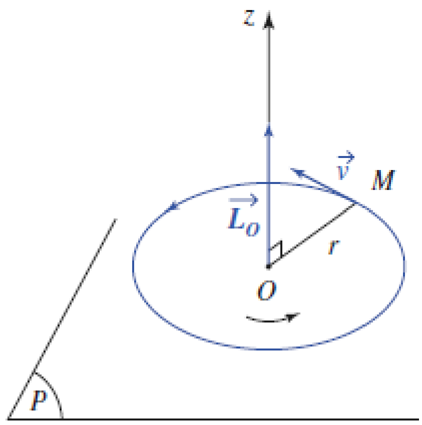
A VOUS DE JOUER

1. Soit la droite Δ passant par M, parallèle à $\vec{v}$, et a la distance entre O et Δ. Le moment cinétique en O du point matériel M est normal au plan défini par Δ et O. Déterminer sa norme.



2. Que peut-on déduire de la valeur du moment cinétique si le point matériel se dirige vers O, autrement dit si sa vitesse « passe » par O ?

3. Soit un point matériel M en mouvement circulaire de centre O et de rayon r, et de vitesse angulaire ω, dans un plan dont le vecteur unitaire normal est $\vec{u}_z$. Déterminer l'expression du moment cinétique de M.



2.2. Loi de transport du moment cinétique

Comme pour le moment d'une force, il est possible de calculer le moment cinétique d'un point M par rapport à un point O' connaissant $\vec{L}_{O/\mathcal{R}}(M)$:

$$\vec{L}_{O'/\mathcal{R}}(M) = \overrightarrow{O'M} \wedge \vec{p} = \left(\overrightarrow{O'O} + \overrightarrow{OM}\right) \wedge \vec{p}$$

On a donc :

$$\boxed{\vec{L}_{O'/\mathcal{R}}(M) = \vec{L}_{O/\mathcal{R}}(M) + \overrightarrow{O'O} \wedge \vec{p}}$$

2.3. Moment cinétique par rapport à un axe

DEFINITION

Soit Δ un axe passant par O, orienté selon la direction de son vecteur unitaire $\vec{u}$. Le **moment cinétique par rapport à l'axe Δ** orienté, du point matériel M dans le référentiel $\mathcal{R}$ est la projection du moment cinétique en O sur l'axe Δ :

$$L_{\Delta/\mathcal{R}}(M) = \vec{L}_{O/\mathcal{R}}(M) \cdot \vec{u}$$

A VOUS DE JOUER

1. Montrer que $L_{\Delta\,/\mathcal{R}}(M)$ est indépendant du choix du point O, point quelconque pris sur l'axe Δ.

2. Déterminer la valeur de $L_{\Delta\,/\mathcal{R}}(M)$ si la vitesse du point matériel M « passe » par l'axe Δ ou si elle est parallèle à l'axe Δ.

3. Théorème du moment cinétique

Le théorème du moment cinétique est un théorème de dynamique : il est l'équivalent du PFD, mais avec les notions introduites précédemment. Nous verrons qu'il est particulièrement pratique lorsqu'on l'applique à des mouvements de rotation.

3.1. Application en un point fixe

O étant un point fixe par rapport au référentiel galiléen $\mathcal{R}$, calculons la dérivée de $\vec{L}_{O/\mathcal{R}}(M)$ par rapport au temps :

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = m\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \wedge \vec{v} + m\overrightarrow{OM} \wedge \frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{v} \wedge \vec{v} + m\overrightarrow{OM} \wedge \vec{F} = \vec{\mathcal{M}}_{O,\vec{F}}$$

Où $\vec{\mathcal{M}}_{O,\vec{F}}$ représente la résultante $\vec{F}$ des forces appliquées en M au point matériel.

THEOREME DU MOMENT CINETIQUE EN UN POINT FIXE O

Dans un référentiel galiléen $\mathcal{R}$, pour un point matériel M soumis à des forces extérieures $\vec{F}_i$ on a :

$$\left(\frac{d\vec{L}_{O/\mathcal{R}}(M)}{dt}\right)_{\mathcal{R}} = \sum_i \vec{\mathcal{M}}_{O,\vec{F}_i}$$

3.2. Application par rapport à un axe fixe

Soit Δ un axe fixe dans le référentiel galiléen $\mathcal{R}$, de vecteur unitaire $\vec{u}$. En projetant les deux termes de l'équation précédente sur Δ nous obtenons :

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} \cdot \vec{u} = \sum_i \vec{\mathcal{M}}_{O,\vec{F}_i} \cdot \vec{u}$$

Soit :

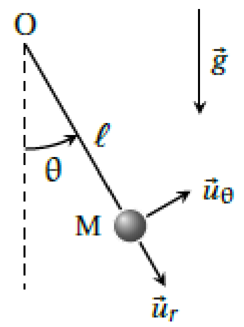
$$\frac{dL_{\Delta\,/\mathcal{R}}}{dt} = \sum_i \mathcal{M}_{\Delta,\vec{F}_i}$$

THEOREME DU MOMENT CINETIQUE EN PROJECTION SUR L'AXE FIXE Δ

Dans un référentiel galiléen $\mathcal{R}$, pour un point matériel M soumis à des forces extérieures $\vec{F_i}$ on a :

$$\left(\frac{dL_{\Delta/\mathcal{R}}(M)}{dt}\right)_{\mathcal{R}} = \sum_i \mathcal{M}_{\Delta,\vec{F}_i}$$

4. Application au pendule simple



Le théorème du moment cinétique a été démontré à partir du principe fondamental de la dynamique (2e loi de Newton). Son utilisation n'apporte donc pas d'information que ne contenait déjà la 2e loi de Newton. Il est juste un autre moyen d'étudier le mouvement. Nous verrons que dans le cas d'un mouvement de rotation autour d'un axe, il s'agit d'un moyen agréable pour obtenir plus rapidement l'équation du mouvement. Nous allons l'illustrer avec le cas du pendule simple, déjà étudié précédemment par d'autres méthodes (PFD et méthode énergétique).

Une masse ponctuelle m est accrochée à l'extrémité d'un fil inextensible et sans masse de longueur l, attachée à un point O fixe dans le référentiel d'étude supposé galiléen. Le mouvement est repéré par l'angle orienté que fait la direction du fil (supposé tendu à tout instant) avec la verticale descendante. On choisit comme base d'étude la base polaire. A l'instant initial, la masse M est écartée de son point d'équilibre d'un angle θ_0 puis lâchée sans vitesse initiale. Il s'agit cette fois de déterminer l'évolution de θ au cours du temps.

A VOUS DE JOUER

1. Faire un bilan des forces appliquées à la masse, en négligeant toute forme de frottement.

2. Appliquer à ce système le théorème du moment cinétique. Retrouver l'équation du mouvement.

3. Commenter le mouvement dans le cas des angles petits, et rappeler l'expression de $\theta(t)$