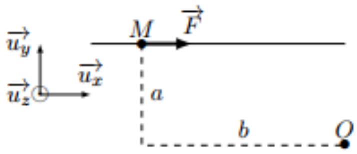
TD 9

Théorème du moment cinétique

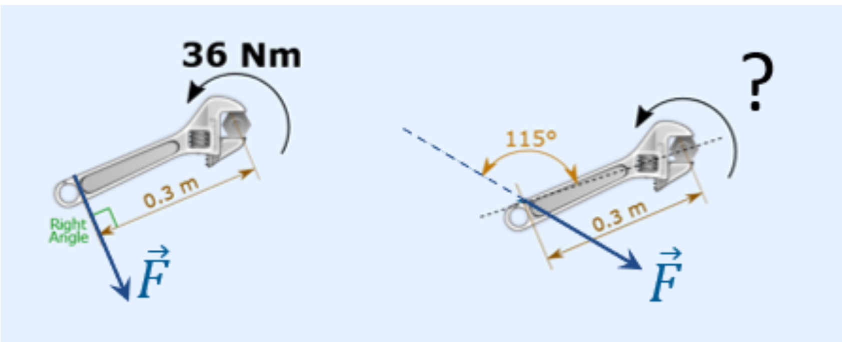
Exercice 1 : Applications directes du cours

1 QCM

1. Les moments par rapport à un point sont des vecteurs. ◯ Vrai ◯ Faux
2. Les moments par rapport à un axe sont des vecteurs. ◯ Vrai ◯ Faux
3. Le moment d'une force à les mêmes dimensions qu'une énergie. ◯ Vrai ◯ Faux
4. Le bras de levier est la distance entre le point d'application d'une force et l'axe considéré ◯ Vrai ◯ Faux
5. Le moment cinétique par rapport à O d'un point matériel M, de masse m, de vitesse $\vec{v}$ et subissant une force $\vec{F}$:
   ◯ s'écrit $\overrightarrow{OM} \wedge \vec{v}$
   ◯ s'écrit $\overrightarrow{OM} \wedge \vec{F}$
   ◯ est nul si sa trajectoire est une droite qui passe par le point O
6. Le moment $\overrightarrow{\mathcal{M}}_{O,\vec{F}}$ de la force $\vec{F}$ d'intensité F par rapport au point O est :
   ◯ $Fa\vec{u}_z$ ◯ $-Fb\vec{u}_y$ ◯ $-Fb\vec{u}_z$ ◯ $-Fa\vec{u}_z$



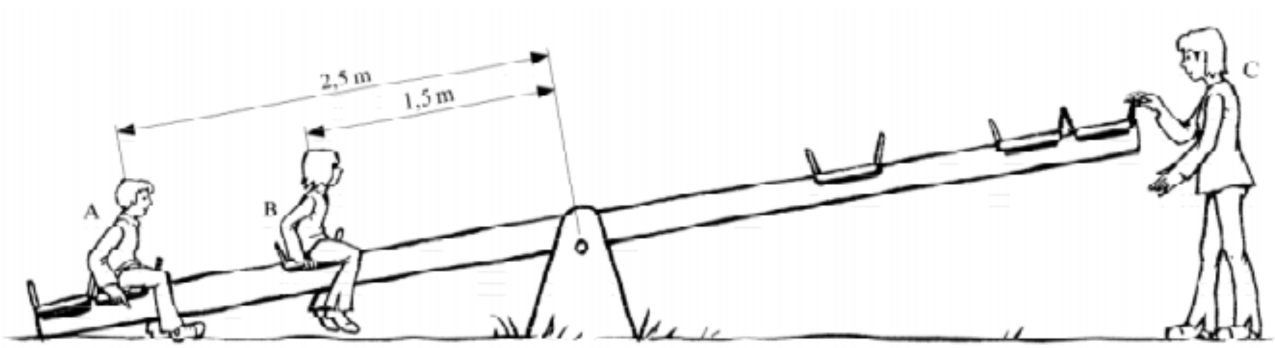
2 Moment et droite d'action d'une force



Calculer le moment inconnu par deux méthodes différentes.

3 Balançoire

La personne A a une masse $m_A = 30$ kg. La personne B a une masse $m_B = 40$ kg. La personne C a une masse $m_C = 65$ kg. A quel endroit doit se placer la personne C pour établir un équilibre (bascule horizontale) ?



Exercice 2 : Pendule simple … le retour !!

Une bille de masse m est suspendue à un fil souple de longueur l et de masse négligeable attaché à un point fixe O. On suppose que la bille est initialement lâchée sans vitesse initiale avec un angle θ_0 par rapport à la verticale. On se place dans le référentiel terrestre supposé galiléen pour étudier le mouvement du pendule. On définit l'axe (Oz) comme l'axe vertical descendant.

Etablir l'équation différentielle vérifiée par le pendule à l'aide de 4 méthodes différentes.

Exercice 3 : Oscillation d'une bille dans une cuvette

Une bille M de masse m peut glisser sans frottement à l'intérieur d'une cuvette sphérique de rayon R. On note $\theta(t)$ l'angle entre $\vec{u}_z$ (direction verticale descendante) et $\overrightarrow{OM}$. La bille est initialement lâchée sans vitesse et d'un angle θ_0.

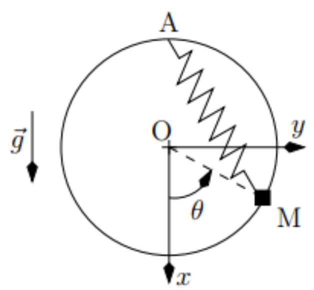
1. Faire un bilan des forces s'exerçant sur la bille, puis calculer le moment de chacune en O.
2. Exprimer le moment cinétique en O de la bille en fonction de la vitesse angulaire $\dot{\theta}(t)$.
3. Déterminer l'équation du mouvement.
4. Déterminer la période T des petites oscillations.

Exercice 4 : Toboggan

Un enfant, assimilé à un point matériel E de masse $m = 20$ kg, glisse sur un toboggan en forme d'arc de cercle, de rayon $R = 2{,}5$ m. Il s'élance à un angle $\theta_0 = 15°$ par rapport à l'horizontale, et sort du toboggan pour $\theta_1 = 90°$. Les frottements sont négligés.

1. Établir l'équation différentielle du mouvement de l'enfant.
2. En déduire la vitesse v en fonction de θ (indice : multiplier par $\dot{\theta}$ l'équation précédente).
3. Calculer la vitesse maximale atteinte. Commenter.

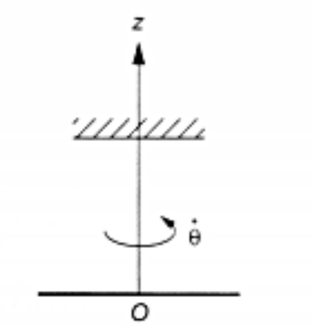
Exercice 5 : Rappel élastique le long d'un cercle



Une masselotte, assimilée à un point matériel M de masse m, est assujettie à glisser sans frottements sur un cercle vertical de center O et de rayon R. Elle est reliée au sommet du cercle noté A par un ressort de constante de raideur k et de longueur au repos l_0.

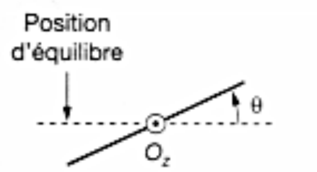
1. Établir l'équation différentielle du mouvement de M, selon trois méthodes.
2. Déterminer les positions d'équilibres. Quelles conditions faut-il sur les constantes du problème pour que trois positions d'équilibres existent ?
3. Étudier alors leur stabilité.

Exercice 6 : Balance de Coulomb



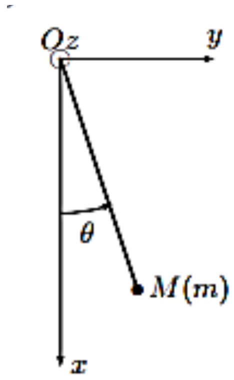
Lors de ses expériences d'électrostatique, qui lui permirent d'en déduire l'expression de l'interaction électrostatique, Coulomb utilisait des pendules de torsion. Un pendule de torsion est constitué d'une tige homogène fixée en son milieu à une ficelle (cf schéma). On fait tourner la tige sur elle-même d'un angle θ afin de tordre la ficelle. Celle-ci exerce alors un couple de rappel élastique proportionnel à l'angle θ :

$$\vec{\Gamma}_e = -C\theta\vec{u}_z$$



1. A l'instant initial on écarte le pendule d'un angle θ_0. Déterminer l'équation différentielle du mouvement.
2. Déterminer la période d'oscillation du pendule.

Exercice 7 : Pendule électrostatique



Un pendule électrostatique est constitué d'une boule de polystyrène expansé recouverte d'une feuille d'aluminium et suspendue à une potence par un fil de masse négligeable.
La boule est préalablement chargée avec une charge électrique $Q = 2,3.10^{-4}$ C.
L'ensemble est placé entre deux plaques de cuivre planes et parallèles soumises à une différence de potentiel telle qu'elles génèrent un champ électrique uniforme $\vec{E} = E\vec{u}_y$ avec $E = 500\ \mathrm{V} \cdot \mathrm{m}^{-1}$.

La longueur du pendule est $OM = R = 10$ cm et la masse de la boule assimilée à un point M est $m = 20$ g. L'accélération de la pesanteur est $g = 9,8\ \mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-2}$.

1. Déterminer la position d'équilibre θ_e du pendule
2. On écarte le pendule légèrement de sa position d'équilibre. Déterminer la pulsation ω_0 des oscillations puis calculer sa période T_0.
   On admettra que pour $|\varepsilon| \ll \theta_e$ on a :
   $$\cos(\theta_e + \varepsilon) \approx \cos(\theta_e) - \varepsilon \sin(\theta_e)$$
   et
   $$\sin(\theta_e + \varepsilon) \approx \sin(\theta e\ ) + \varepsilon\ cos(\theta e\ )$$