Chapitre 3 : les nombres complexes

Introduction : Entre le 15 ème et 16 ème siècle des algébristes Italiens ont poursuivi l'aventure de la résolution des équations qui a vu l'invention des fractions pour construire des solutions à des équations du type 3x = 5, des racines carrées pour résoudre $x^2 = 2$, et donc une nouvelle catégorie de nombres pour résoudre des équations du type $x^2 = -1$.

I. L'ensemble des nombres complexes

1) Définition

La construction du corps des complexes n'étant pas au programme, on admet qu'il existe un ensemble $\mathbb{C}$ contenant $\mathbb{R}$

Il est muni d'une addition, d'une multiplication

Il possède un élément i tel que $\boldsymbol{i^2 = -1}$

Tout nombre complexe s'écrit de manière unique *x+ iy avec x et y réels*

On appelle *x* la partie réelle du complexe et *y* sa partie imaginaire.

Remarque : Les nombres complexes sont des nombres à la profonde essence géométrique, nous le détaillerons précisément dans le III.

Toutefois, nous risquons d'avoir besoin pour faciliter les démonstrations de l'identification au plan complexe.

Ainsi tout point M(x ;y) du plan sera associé à un nombre complexe $z_M = x + iy$ (nous verrons que ce complexe s'appelle l'affixe).

Les opérations algébriques sur les complexes auront leur correspondance en transformations géométriques (et réciproquement)

2) Addition et multiplication

Soient $(z ;z')\in \mathbb{C}^2$, on a ainsi : $z=x+ i\,y$ et $z'=x'+ i\,y'$

Alors : $z+z' = (x+x') + i\,(y+y')$

Et $zz' = (xx'-yy') + i\,(xy'+yx')$

3) Remarques

On a z réel si et seulement si $\mathrm{Im}(z) = 0$

Le complexe 0+0i se note tout simplement 0

Un complexe tel que sa partie réelle est nulle, est appelé imaginaire pure.

Leur ensemble se note $i\mathbb{R}$

4) Conséquence de l'unicité d'écriture :

Deux nombres complexes sont égaux si et seulement s'ils ont même partie réelle et même partie imaginaire.

Démonstration : Soit $z = x+ i\,y$ et $z'=x'+ i\,y'$, si $z=z'$ alors $x+ i\,y = x'+ i\,y'$

Et $(x-x')+ i\,(y-y') = 0$ or $0 = 0+0i$ donc l'unicité d'écriture implique que $x-x'=0$ et $y-y'=0$ soit $x=x'$ et $y=y'$

5) Extension de quelques propriétés calculatoires (liste non exhaustive)

Si zz' = 0 alors z=0 ou z' = 0

Le binôme de Newton : $\forall(z_1;z_2) \in \mathbb{C}^2$, $(z_1 + z_2)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} z_1^{\,k} z_2^{\,n-k}$

La somme des termes consécutifs d'une suite géométrique :

$\forall(p,n) \in \mathbb{N}^2 \forall z \in \mathbb{C}\{1\}, \sum_{k=p}^{q} z^k = \frac{z^p(z^{q-p+1}-1)}{z-1}$

On a la propriété dite de factorisation :
$\forall n \in \mathbb{N}^*\forall(a;b) \in \mathbb{C}^2$, $a^n - b^n = (a-b)\sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k}$

6) Différence majeure entre $\mathbb{R}$ *et* $\mathbb{C}$
Il n'y a pas de relation d'ordre compatible avec les complexes comme c'est le cas pour les réels. Si une telle relation existait, $1^2 = 1>0$ et $i^2 = -1>0$ ce qui est contradictoire…

7) Conjugué d'un nombre complexe
Pour tout complexe z, on appelle conjugué de z noté $\bar{z}$, défini par
$\bar{z}$ **= Re(z) – Im(z)*i*** (on donnera une interprétation géométrique dans le III)

Propriétés :
Pour tout nombre complexe z, on a : $\bar{\bar{z}} = z$, $\mathrm{Re}(z) = \frac{z+\bar{z}}{2}$ et $\mathrm{Im}(z) = \frac{z-\bar{z}}{2i}$
Démonstration : Faire simplement le calcul !

Un nombre complexe est réel si et seulement si $\bar{z} = z$

Pour tous les nombres complexes z_1 et z_2, on a : $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$
On a aussi : $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\ \overline{z_2}$ et pour $z_2 \neq 0$, $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$

Démonstration pour le produit : $\overline{z_1 z_2} = \overline{(x + \imath y)(x' + \imath y')} = \overline{(xx' - yy') + \imath(yx' + xy')} =$ *(xx'-yy')-i(yx'+xy')*
Et d'autre part : $\overline{z_1}\ \overline{z_2}$ *= (x-iy)(x'-iy') = (xx'-yy')-i(yx'+xy')*

8) Module
a) Pour tout nombre complexe z, le module de z noté $|z|$,
défini par $|\boldsymbol{z}| = \sqrt{(\boldsymbol{Re}(\boldsymbol{z})^2 + (\boldsymbol{Im}(\boldsymbol{z}))^2}$
Une interprétation géométrique sera donnée dans le III.

b) Propriétés sur le module
Pour tout complexe z, $|z| = |-z| = |\bar{z}|$

On a : z=0 ssi $|z| = 0$

Pour tout complexe, $|Re(z)| \leq |z|$ et $|Im(z)| \leq |z|$

Démonstration, utiliser le fait que $|z| = \sqrt{(Re(z)^2 + (Im(z))^2}$

Exemple : Déterminer |3-i| et |2+3i|

c) Formule sur le produit, le quotient, l'inverse
Pour tout complexe z non nul : $\frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{z}} = \frac{\bar{\boldsymbol{z}}}{|\boldsymbol{z}|^2}$
$\forall(\boldsymbol{z_1};\boldsymbol{z_2}) \in \mathbb{C}^2$, $|\boldsymbol{z_1 z_2}| = |\boldsymbol{z_1}||\boldsymbol{z_2}|$
$\forall(\boldsymbol{z_1};\boldsymbol{z_2}) \in \mathbb{C}^2$, **pour** $\boldsymbol{z_2} \neq \boldsymbol{0}$, $\left|\frac{\boldsymbol{z_1}}{\boldsymbol{z_2}}\right| = \frac{|\boldsymbol{z_1}|}{|\boldsymbol{z_2}|}$

Démonstration :

On a : $|z_1z_2| = |(xx' - yy') + i(yx' + xy')| = \sqrt{(xx' - yy')^2 + (yx' + xy')^2}$

Donc $|z_1z_2| = \sqrt{x^2x'^2 + y^2y'^2 - 2xx'yy' + y^2x'^2 + x^2y'^2 + 2yx'xy'}$

$= \sqrt{x^2x'^2 + y^2y'^2 + y^2x'^2 + x^2y'^2}$

Et: $|z_1||z_2| = \sqrt{x^2 + y^2} \times \sqrt{x'^2 + y'^2} = \sqrt{(x^2 + y^2)(x'^2 + y'^2)}$

$=\sqrt{x^2x'^2 + y^2y'^2 + y^2x'^2 + x^2y'^2}$

Pour l'inverse : pour z$\neq$ 0, $\left|z \times \frac{1}{z}\right| = |1| = 1$

Et : $\left|z \times \frac{1}{z}\right| = |z| \times \left|\frac{1}{z}\right|$ donc $|z| \times \left|\frac{1}{z}\right| = 1$ et $\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}$

Pour le quotient : $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \left|z_1 \times \frac{1}{z_2}\right| = |z_1| \times \frac{1}{|z_2|} = |z_1| \times \frac{1}{|z_2|}$

d) Inégalités triangulaires

<u>La première :</u>

$\forall(z_1; z_2) \in \mathbb{C}^2, |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ avec égalité ssi $z_1 = 0$ ou $\exists u \in \mathbb{R}+$, $z_2 = uz_1$

Démonstration :

Développons : $|z_1 + z_2|^2 = (z_1 + z_2)(\overline{z_1 + z_2}) = |z_1|^2+|z_2|^2+2\mathrm{Re}(\bar{z}_1z_2)$

D'autre part : $(|z_1| + |z_2|)^2 = |z_1|^2+|z_2|^2+2|z_1| \times |z_2|$

L'inégalité $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ équivaut donc à : $\mathrm{Re}(\bar{z}_1z_2) \leq |z_1| \times |z_2|$

Or $\mathrm{Re}(\bar{z}_1z_2) \leq |\mathrm{Re}(\bar{z}_1z_2)| \leq |(\bar{z}_1z_2)| = |z_1| \times |z_2|$

On a l'égalité ssi : $\mathrm{Re}(\bar{z}_1z_2) = |z_1| \times |z_2| \Leftrightarrow \mathrm{Re}(\bar{z}_1z_2) = \overline{|z_1|} \times |z_2| = |\bar{z}_1z_2|$

Ce qui équivaut à $z_1 = 0$ ou $\bar{z}_1z_2 \in \mathbb{R}+$ (Voir exercice)

Si $z_1 \neq 0$, $\bar{z}_1z_2 = z_2\frac{|z_1|^2}{z_1}$...

<u>La deuxième :</u>

$\forall(z_1; z_2) \in \mathbb{C}^2, ||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 - z_2|$

Exercice :

Soit z$\in \mathbb{C}$ tel que |z| =1, montrer que $\frac{z^2-1}{z} \in i\mathbb{R}$

II. Exponentielle complexe et résolution d'équations

1) Exponentielle complexe $e^{i\theta}$ avec θ réel

Pour tout réel θ, on note $\boldsymbol{e^{i\theta}}$ **le complexe** $\boldsymbol{\cos(\theta)+i\sin(\theta)}$

L'exponentielle réelle a déjà été rencontrée, et l'intérêt de cette notation est qu'elle permet d'utiliser les propriétés connues pour l'exponentielle réelle pour généraliser et obtenir celles sur les complexes :

Ainsi : $e^{i\theta}e^{i\varphi} = e^{i(\theta+\varphi)}$, $\overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$ et $\frac{e^{i\theta}}{e^{i\varphi}} = e^{i\theta}\ e^{-i\varphi}$

Les complexes de la forme $e^{i\theta}$ avec θ réel sont de module 1 (ils sont donc situés sur le cercle trigonométrique)

A partir de l'exponentielle complexe, on peut retrouver :

$\text{Cos}(\theta) = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$

$\text{Sin}(\theta) = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$

Exercice : Ecrire sans l'exponentielle $e^{i\frac{\pi}{2}}$ et $e^{i\pi}$

2) Propositions

Soit z un complexe non nul

a) Si $|z| = 1$, alors $\exists\theta \in \mathbb{R}$, z=$e^{i\theta}$

   Démonstration : De façon purement géométrique, le point d'affixe z est sur le cercle trigonométrique, ses coordonnées sont (cos θ ; $sin\theta$),
   donc z = cos $\theta + i sin\,\theta$

b) Soit θ et φ deux réels , $e^{i\theta} = e^{i\varphi}$ si et seulement si $\theta \equiv \varphi[2\pi]$ (c'est-à-dire s'il existe k$\in \mathbb{Z}$, tel que : $\theta = \varphi$+2k π

   Démonstration : Géométriquement, les deux complexes représentent le même point du cercle trigonométrique avec un certain nombre de tours k

c) Il existe un réel positif non nul r_0 et un réel θ_0 tels que : z=$r_0 e^{i\theta_0}$
   Il s'agit de l'écriture exponentielle

   Démonstration : Il suffit de considérer : $\frac{z}{|z|}$…

d) Tout nombre complexe z admet une écriture de la forme : z= $|z|$(cos(θ)+isin(θ)), il s'agit de la forme dite trigonométrique de z.

   Démonstration : C'est un simple jeu d'écriture de la propriété différente.

3) Exponentielle complexe de la forme e^z avec z complexe.

Pour tout nombre complexe z, on définit $\mathbf{e^z = e^{Re(z)}e^{i\,Im(z)}}$

Propositions :

Pour tout nombre complexe z, on a $|e^z| = e^{Re(z)}$

Si z et z' sont deux complexes alors : $e^{z+z'} = e^z e^{z'}$

Pour tout nombre complexe z, $e^z \neq 0$ et $(e^z)^{-1} = e^{-z}$

4) Racine d'une équation polynomiale

Une équation algébrique complexe est une équation d'inconnue z$\in \mathbb{C}$, de la forme P(z) = 0 où P est une fonction polynomiale.

Proposition : **Si P est une fonction polynomiale à coefficients complexes et a une racine de P, alors il existe une fonction polynomiale Q à coefficients complexes telle que : $\forall z \in \mathbb{C}$ P(z) = (z-a)Q(z)**

Démonstration : Utiliser la factorisation z^k-a^k par z-a

Remarque : La réciproque est immédiate, si le degré de P est n, alors celui de Q sera n-1

Exercice : Soit P(z) = z^3-2z^2-5z+6 pour tout z complexe.

En remarquant que P(1) = 0, factoriser totalement P

D'abord : z^3-2z^2-5z+6 = (z-1)(z^2-z-6)

On résout ensuite : z^2-z-6 = 0, Δ = 25 et z = $\frac{1\pm5}{2}$

Finalement les solutions sont : 1, 3 et -2

5) Racine carrée
On appelle racine carrée d'un complexe z tout nombre complexe Z tel que $Z^2 = z$

Proposition : **Tout complexe non nul admet exactement deux racines carrées opposées.**

Démonstration : On écrit z=r$e^{i\theta}$, et on cherche Z sous la même forme…

Exercice : Déterminer les racines carrées de 21-20i

On cherche les racines carrées sous la forme x+iy
On a donc : $(x+iy)^2$ = 21-20i, soit : x^2-y^2 +2xyi = 21-20i
Par identification, x^2-y^2=21 et 2xy = -20
On cherche donc x et y tels que : x^2-y^2 = 21 et xy=-10
De plus x^2+y^2 = $|x+iy|^2 = |21-20i| = \sqrt{21^2+20^2} = 29$
On obtient donc 2x^2=21+29=50 soit x^2=25 et x=$\pm$5
Et 2y^2=29-21, soit y^2=4 et y=$\pm$2
Comme xy$\leq$0 et que les racines carrées sont opposées, on obtient -5+2i et 5-2i

6) Extension des équations du second degré réelles à l'ensemble des complexes.
Soient a,b,c 3 nombres réels avec a $\neq$0, et l'équation (E) : az^2+bz+c = 0
On note Δ = b^2-4ac
Si Δ = 0, alors l'équation E admet une racine double $z_0 = \frac{-b}{2a}$

Si Δ>0, alors l'équation E admet deux racines réelles distinctes,
$z_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $z_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$

Si Δ≠0, alors l'équation E admet deux racines distinctes, , alors : $z_1 = \frac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ et $z_2 = \frac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a}$

Démonstration : Comme dans le cas réel, on utilise la forme canonique.

7) Résolution d'équation du second degré dans le cas général

Soient a,b,c 3 nombres complexes avec $a \neq 0$, et l'équation (E) : $az^2+bz+c = 0$
On note $\Delta = b^2-4ac$
Si $\Delta = 0$, alors l'équation E admet une racine double $z_0 = \frac{-b}{2a}$
Si $\Delta \neq 0$, alors l'équation E admet deux racines distinctes, et en appelant δ une racine carrée de Δ, alors : $z_1 = \frac{-b+\delta}{2a}$ et $z_2 = \frac{-b-\delta}{2a}$

Démonstration : Comme dans le cas réel, on utilise la forme canonique.

Ex : Résoudre l'équation $z^2-(3+4i)z-1+5i = 0$

On calcule $\Delta = (3+4i)^2-4\times 1 \times (-1+5i) = -3+4i$

On cherche $(x+iy)^2=-3+4i$

D'où: $x^2-y^2+2ixy=-3+4i$, soit $x^2-y^2=-3$ et $xy=2$

Et, $x^2+y^2=\sqrt{9+16} = 5$

$2x^2=2$ et $x=\pm 1$

$2y^2=8$ et $y = \pm 2$, comme $xy>0$

D'où : $\delta=-1-2i$ ou $1+2i$

On peut en déduire : $z=\frac{3+4i\pm(1+2i)}{2}$

Soit $z=2+3i$ ou $z=1+i$

8) Relations entre coefficients et racines

Soient a,b,c 3 nombres complexes avec $a \neq 0$, et si z_1 et z_2 sont deux racines (éventuellement confondues) de l'équation $az^2+bz+c = 0$ alors : $z_1 + z_2 = \frac{-b}{a}$ et $z_1z_2 = \frac{c}{a}$

Démonstration : Expliciter les solutions et vérifier le produit et la somme

Exercice : Montrer que : si s et p deux nombres complexes, alors les nombres z_1 et z_2 vérifient le système $\begin{cases} z_1 + z_2 = s \\ z_1z_2 = p \end{cases}$ si et seulement si z_1 et z_2 sont les deux racines de $z^2-sz+p = 0$.

Démonstration : Si z_1 et z_2 sont les racines de $z^2-sz+p = 0$, alors d'après 8),

$z_1 + z_2 = s$ et $z_1z_2 = p$

Réciproquement, si z_1 et z_2 vérifient $\begin{cases} z_1 + z_2 = s \\ z_1 z_2 = p \end{cases}$ alors

$(z-z_1)(z-z_2) = z^2-(z_1+z_2)z+z_1z_2 = z^2-sz+p$

Donc l'équation $z^2-sz+p = 0$ correspond à $(z-z_1)(z-z_2) = 0$ et les solutions sont z_1 et z_2

III. Applications géométriques des nombres complexes

Le plan usuel étant muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, tout point M est caractérisé par un unique couple de coordonnées (x ;y) vérifiant : $\overrightarrow{OM} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}$

1) Affixe

Le complexe z=x+iy est appelé affixe de $\overrightarrow{OM}$ ou affixe de M.

Proposition

Si A et B sont deux points d'affixes a et b, alors l'affixe de $\overrightarrow{AB}$ est b-a

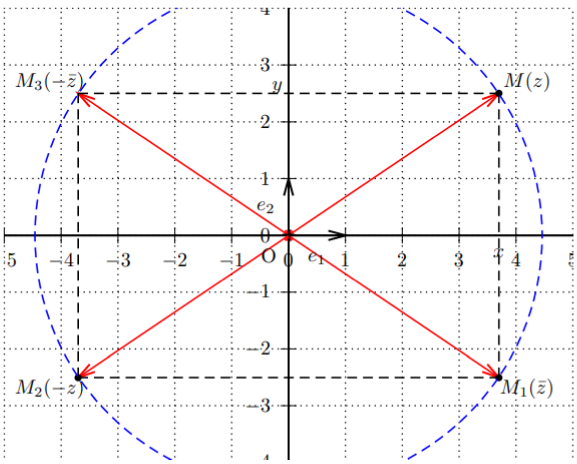
Démonstration : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OB}$ - $\overrightarrow{OA}$ a pour affixe b-a

2) Interprétation géométrique du conjugué et du module

Les points d'affixes z et $\bar{z}$ sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses.

Démonstration : Un petit dessin…

Si z_1 et z_2 sont deux complexes, alors $|z_1 - z_2|$ est la distance séparant les points d'affixes z_1 et z_2



Les points M, M_1, M_2, M_3 se trouvent sur le cercle de centre O et de rayon $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Les nombres réels sont les affixes des points de l'axe des abscisses, que l'on appelle donc **axe réel**.

Les nombres imaginaires purs sont les affixes des points de l'axe des ordonnées, que l'on appelle donc **axe imaginaire pur**.

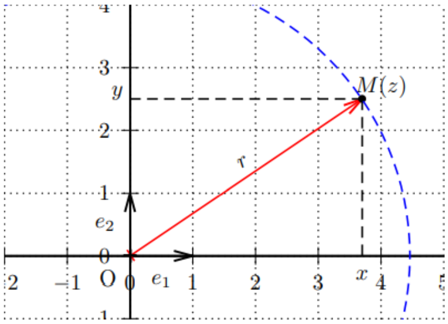
3) Argument

Lemme : Pour tout point M du cercle trigonométrique, il existe un réel θ tel que l'abscisse de M est $\cos(\theta)$ et son ordonnée est $\sin(\theta)$

Ce réel θ est même unique si on ajoute comme condition qu'il appartienne $[0,2\pi[$ ou $]-\pi, \pi[$

Par extension, tout point du plan de module r, est repéré par une abscisse x=rcos(θ) et une ordonnée y = rsin(θ)

Ce nombre θ est appelé argument du complexe. On constate donc que pour un complexe donné, le module est unique par l'argument est défini modulo 2 π



Soit $z = x + iy \in \mathbb{C}$. On a $|z| = \sqrt{x^2+y^2} = r$.

Si $z \neq 0$, on peut alors factoriser par r :

$z = r\left(\frac{x}{r} + i\frac{y}{r}\right)$ avec $\left(\frac{x}{r}\right)^2 + \left(\frac{y}{r}\right)^2 = \frac{x^2+y^2}{r^2} = \frac{r^2}{r^2} = 1$

Il existe alors $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $\begin{cases} \cos\theta = \frac{x}{r} \\ \sin\theta = \frac{y}{r} \end{cases}$.

Propositions :
Si z_1 et z_2 sont deux complexes non nuls d'arguments respectifs θ_1 et θ_2 alors :
Un argument de $\overline{z1}$ est -θ_1
Un argument de z_1z_2 est $\theta_1 + \theta_2$
Un argument de $\frac{z_1}{z_2}$ est θ_1- θ_2
Un argument de z_1^n est nθ_1

Corollaire « géométrique » : Deux nombres complexes sont égaux si et seulement s'ils ont même module et des arguments égaux modulo 2 π

Démonstration : cf l'exercice final du cours…

4) Forme exponentielle
Le fait qu'un argument de z_1z_2 est $\theta_1 + \theta_2$ nous rappelle une propriété de l'exponentielle réelle, d'où l'idée de désigner le complexe cos(θ)+isin(θ) par $e^{i\theta}$

Soit z un complexe non nul, il existe r_0 réel positif non nul, et θ_0 réel tels que : z=$r_0e^{i\theta_0}$
Bien que 0 n'ait pas d'argument, on écrit $0 = 0e^{i\theta}$ pour n'importe quelle valeur d'argument, cela revient à utiliser une boussole au pôle nord…

Exercice : Soit : z_1=$r_1e^{i\theta_1}$ et z_2=$r_2e^{i\theta_2}$ deux complexes, avec $z_2 \neq 0$, donner les écritures sous forme exponentielle complexe de : z_1z_2 ; $\frac{z_1}{z_2}$; $\frac{1}{z_2}$; $\overline{z1}$ et z_1^n

On a : $z_1z_2 = r_1r_2e^{i(\theta_1+\theta_2)}$, $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}e^{i(\theta_1-\theta_2)}$, $\overline{z1} = r_1e^{-i\theta_1}$ et $z_1^n = {r_1}^n e^{in\theta_1}$

5) Une application géométrique
Soit trois points du plan A, B et C d'affixes respectives a, b et c alors toute mesure de ($\overrightarrow{AB}$,$\overrightarrow{AC}$) est un argument du complexe $\frac{c-a}{b-a}$