TD 6

Diffusion de particules

Exercice 1 : Diffusion de neutrons dans un milieu

On étudie la diffusion de neutrons dans un matériau homogène vérifiant la loi de Fick de coefficient de diffusion D. On notera n la densité de neutrons et $\vec{j}$ le vecteur densité de particules.

La diffusion se fait parallèlement à l'axe (Ox). Les grandeurs n et $\vec{j}$ ne dépendent alors que de x et du temps t. On écrira $\vec{j} = j(x,t)\vec{u}_x$.

1. Indiquer les unités de n, j et D. Justifier la présence du signe moins dans la loi de Fick.

Cas sans sources

Le matériau est une tige de section constante S, de longueur L, dans laquelle il ne se produit aucune absorption ou création de neutrons.

2. En effectuant un bilan de particules sur un volume de section S compris entre les cotes x et $x + dx$, établir l'équation différentielle vérifiée par n.
3. On se place dans cette question en régime permanent. En notant n_0 et n_L les valeurs de n en $x = 0$ et $x = L$, exprimer n et j en fonction de x et des autres données du problème.

Sortie de réacteur, absorption de neutrons

Le matériau, placé en sortie d'un réacteur, absorbe des neutrons.

Le nombre $\delta\mathcal{N}_a$ de neutrons absorbés dans un volume élémentaire dV pendant un intervalle de temps dt est donné par : $\delta\mathcal{N}_a = \frac{n}{\tau}\, dV\, dt$ où τ est une constante positive.

4. En faisant un bilan local de particules, montrer que n vérifie l'équation différentielle suivante :
$$\frac{\partial n}{\partial t} = D\frac{\partial^2 n}{\partial x^2}(x,t) - \frac{n}{\tau}$$

   On suppose le réacteur fonctionnant en régime permanent. Celui-ci impose, en $x = 0$, un flux de neutrons constant, de densité $\vec{j}(0) = \vec{j}_0 = j_0\,\vec{u}_x$ avec $j_0 > 0$. On supposera le matériau suffisamment épais pour le supposer de longueur infinie selon (Ox), avec une densité de neutrons nulle pour $x \longrightarrow +\infty$.

5. Établir l'expression de la densité de neutrons dans la tige en fonction de j_0, τ , D et x.
6. En déduire celle de $\vec{j}(x)$.
7. Exprimer la distance δ à partir de laquelle la densité de neutrons est égale à 1% de sa valeur en $x = 0$ en fonction de D et τ .

Exercice 2 : Diffusion d'un parfum

Un diffuseur de parfum est mis en place à $t = 0\ s$ à une extrémité d'un couloir. On négligera tout phénomène de convection. Une personne située à une distance $d_1 = 5$ m du diffuseur détecte l'odeur du parfum au bout d'un temps $t_1 = 40$ mn.

1. En modélisant la diffusion comme une diffusion monodimensionnelle, établir l'équation de diffusion vérifiée par n.
2. Généraliser l'équation précédente à trois dimensions.
3. En utilisant des ordres de grandeur, et des données de l'énoncé, estimer la valeur du coefficient de diffusion D des molécules de parfum dans l'air.
4. Au bout de quelle durée une personne située à $d_2 = 15$m du diffuseur détectera-t-elle l'odeur ?

Exercice 3 : Diffusion de neutrons dans un barreau de plutonium

On étudie la diffusion unidirectionnelle de neutrons dans un barreau de plutonium cylindrique d'axe (Ox) et de section droite d'aire S s'étendant entre les abscisses $x = 0$ et $x = L$. On note $n(x, t)$ la densité volumique de neutron. Cette diffusion satisfait une loi de Fick avec un coefficient de diffusion $D = 22\ \mathrm{m^2.s^{-1}}$.

Par ailleurs, du fait de réactions nucléaires entre les neutrons et la matière, des neutrons sont produits : il apparaît un nombre $\frac{n}{\tau}$ de neutrons par unité de temps et de volume, avec $\tau = 2{,}86 \cdot 10^{-5}$ s un temps caractéristique des réactions nucléaires dans le barreau.

On admettra en première approximation que n doit s'annuler à tout instant aux extrémités du cylindre (en $x = 0$ et $x = L$). En revanche $n(x, t) \neq 0\ \forall x \in [0; L]$.

1. A partir d'un bilan local de particules, l'équation différentielle vérifiée par n.
2. On se place en régime permanent.
   (a) Déterminer $n(x)$ à une constante multiplicative près.
   (b) Montrer que ce régime n'est possible que pour une valeur particulière L_s de L que l'on déterminera.

Exercice 4 : Diffusion dans un cylindre

On considère une diffusion latérale dans les parois d'un tuyau d'arrosage poreux de forme cylindrique. Dans la base cylindrique, le vecteur densité de courant s'écrit donc :

$$\vec{j} = j(r)\,\vec{u}_r$$

1. Redémontrer l'expression de l'équation de conservation de la matière dans un cas à une dimension.
2. Généraliser l'expression à un cas 3D.

On se place dans toute la suite en régime permanent. Le tuyau contient de l'eau. Il a un rayon intérieur noté $R_1 = 8\ \mathrm{mm}$ et un rayon extérieur $R_2 = 9\ \mathrm{mm}$. Sur une longueur $l = 1\ \mathrm{mm}$ de tuyau, on relève sur la paroi extérieure un débit de fuite $D_V = 1\ \mathrm{mm^3 \cdot h^{-1}}$.

3. Grâce aux données, déduire simplement l'expression de $\vec{j}(R_2)$. Faire l'application numérique.
4. En déduire l'expression de $j(r)$.
5. Etablir l'expression de la densité particulaire n_0 de l'eau liquide. Faire l'application numérique.
6. Par des considérations de continuité, en déduire la valeur de $n(r = R_1)$ de la densité particulaire sur la face interne du tuyau d'arrosage.
7. En déduire l'expression de $n(r)$.

Données :

Masse volumique de l'eau : $\rho = 1\ \mathrm{kg.m^3}$.
Masse molaire de l'eau : $M = 18\ \mathrm{g.mol^{-1}}$.

$$\mathrm{div}(\vec{A}) = \frac{1}{r}\frac{\partial(rA_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$