TD Diffusion de particules

Ex 1 : Diffusion de neutrons dans un milieu

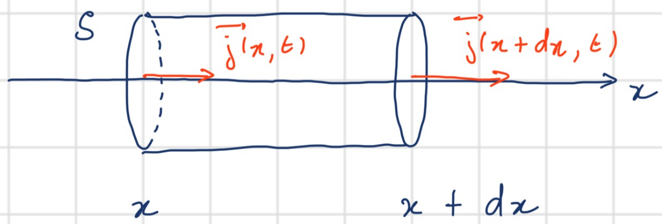
1° Densité volumique : n en m^{-3} (nombre de neutrons par m^3)

Vecteur densité de courant de neutrons : j en $m^{-2}s^{-1}$ ($\vec{j} = n\vec{v}$)

(nombre de neutrons traversant une surface par unité de temps)

Diffusivité : D en $m^2 s^{-1}$ ($\vec{j} = -D\,\vec{grad}\, n$)

2°



Nombre de neutrons entrant dans le cylindre en x :

$$\delta N_x = \phi_x \, dt = \iint_S j(x,t)\, dS\, dt = j(x,t)\, S\, dt$$

Nombre de neutrons sortant du cylindre en $x + dx$:

$$\delta N_{x+dx} = \phi_{x+dx} = \iint_S j(x+dx,t)\, dS\, dt = j(x+dx,t) S\, dt$$

Bilan temporel :

$$N(x, t+dt) = N(x,t) - \delta N_x - \delta N_{x+dx}$$

$$n(x,t+dt)\, dx\, S = n(x,t)\, dx\, S + j(x,t) S\, dt - j(x+dx,t) S\, dt$$

DL 1er ordre : $$\frac{\partial n(x,t)}{\partial t} = -\frac{\partial j(x,t)}{\partial x}$$

Loi de Fick : $\vec{j}(M,t) = -D\,\overrightarrow{\text{grad}}\,n(M,t)$

à 1 D la loi de Fick devient : $j(x,t)\,\vec{u_x} = -D\,\frac{\partial n(x,t)}{\partial x}\vec{u_x}$

que l'on injecte dans l'équation locale de conservation :

$$\frac{\partial n(x,t)}{\partial t} = D\,\frac{\partial^2 n(x,t)}{\partial x^2}$$

3° Régime permanent : $\frac{\partial n(x,t)}{\partial t} = 0$

L'équation devient : $\frac{\partial^2 n(x,t)}{\partial x^2} = 0$ et s'intègre en :

$n(x,t) = Ax + B$

En $x = 0$ $n(0,t) = n_0 = B$

En $x = L$ $n(L,t) = n_L = AL + n_0$ d'où $A = \frac{n_L - n_0}{L}$

$$\longrightarrow \boxed{n(x,t) = \left(\frac{n_L - n_0}{L}\right)x + n_0}$$

$$\boxed{j(x,t) = -D\,\frac{\partial n(x,t)}{\partial x} = -D\left(\frac{n_L - n_0}{L}\right)}$$

4° $\delta N_a = \frac{n}{\tau}\,dV\,dt$ (nombre de neutrons absorbés dans un volume dV pendant dt)

on absorbe donc on retire !

$N(x, t+dt) = N(x,t) + \delta N_x - \delta N_{x+dx} - \delta N_a$

$n(x, t+dt)\,dx\,S = n(x,t)\,dx\,S + j(x,t)\,S\,dt - j(x+dx,t)\,S\,dt$

$- n/\tau\,dx\,S\,dt$

$$\frac{\partial n(x,t)}{\partial t} = -\frac{\partial j(x,t)}{\partial x} - \frac{n}{\tau} \quad \text{or} \quad j(x,t) = -D\frac{\partial n(x,t)}{\partial x}$$

On a donc : $\boxed{\dfrac{\partial n(x,t)}{\partial t} = D\dfrac{\partial^2 n(x,t)}{\partial x^2} - \dfrac{n}{\tau}}$

5° Régime permanent : $\dfrac{\partial n(x,t)}{\partial t} = 0$

L'équation précédente devient $\dfrac{\partial^2 n(x,t)}{\partial x^2} = \dfrac{n}{D\tau}$ qui peut s'écrire :

$$\frac{\partial^2 n}{\partial x^2} - \frac{1}{D\tau}n = 0$$

Equation caractéristique : $r^2 - \dfrac{1}{D\tau} = 0$

$$r = \pm\sqrt{\frac{1}{D\tau}}$$

la variable c'est "x" pas "t"

On a donc $n(x,t) = A e^{-x/\sqrt{D\tau}} + B e^{x/\sqrt{D\tau}}$

$x \longrightarrow \infty$ alors $n(\infty, t) = 0 = 0 + B$ donc $B = 0$

$$n(x,t) = A e^{-x/\sqrt{D\tau}} + 0$$

$j(x,t) = -D\dfrac{\partial n(x,t)}{\partial x}$ avec $n(x,t) = A e^{-x/\sqrt{D\tau}}$

il vient $j(x,t) = -D \times \left(-\dfrac{A}{\sqrt{D\tau}}\right) e^{-x/\sqrt{D\tau}} = A\sqrt{\dfrac{D}{\tau}}\, e^{-x/\sqrt{D\tau}}$

Enoncé : $j(0,t) = A\sqrt{\dfrac{D}{\tau}} = j_0$ donc $A = j_0\sqrt{\dfrac{\tau}{D}}$

$$\boxed{n(x,t) = j_0\sqrt{\frac{\tau}{D}}\, e^{-x/\sqrt{D\tau}} = n_0 e^{-x/\sqrt{D\tau}}}$$

5° $j(x,t) = -D \dfrac{\partial n(x,t)}{\partial x} = -D\, j_0 \sqrt{\dfrac{\tau}{D}} \left(-\dfrac{1}{\sqrt{D\tau}}\right) e^{-x/\sqrt{D\tau}}$

$$j(x,t) = j_0\, e^{-x/\sqrt{D\tau}}$$

6° $\vec{j}(x,t) = j_0\, e^{-x/\sqrt{D\tau}}\ \vec{u_x}$

7° $\dfrac{n(\delta)}{n(0)} = 0{,}01 \qquad e^{-\delta/\sqrt{D\tau}} = 0{,}01$

$$\delta = \sqrt{D\tau}\ \ln 100$$

Ex 2

1° Equation locale de conservation : $\dfrac{\partial n}{\partial t} = -\dfrac{\partial j}{\partial x}$

Loi de Fick : $j = -D \dfrac{\partial n}{\partial x}$

On peut donc écrire $\boxed{\dfrac{\partial n}{\partial t} = D \dfrac{\partial^2 n}{\partial x^2}}$ ← équation de diffusion 1D

2° $\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial n}{\partial t} = -\operatorname{div} \vec{j} \\ \vec{j} = -D\, \overrightarrow{\text{grad}}\, n \end{array}\right\}$ $\boxed{\dfrac{\partial n}{\partial t} = D \Delta n}$ ← équation de diffusion 3D

avec $\Delta n = \dfrac{\partial^2 n}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 n}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 n}{\partial z^2}$

Laplacien

3° En ordre de grandeur, l'équation de diffusion devient :

$\dfrac{n^*}{\tau} = D \dfrac{n^*}{L^2}$ donc $D = \dfrac{L^2}{\tau} = \dfrac{d_1^2}{t_1} \approx 1{,}0 \cdot 10^{-2}\ m^2 \cdot s^{-1}$

4. $\tau = \frac{L^2}{D} = \frac{d_2^{\,2}}{D} \approx 6,25\ h$

Ex 3 : Diffusion de neutrons dans un barreau de plutonium

1° Nombre de neutrons entrant dans le barreau :

$$\delta N_x = \phi_x\, dt = \iint_S j(x,t)\, dS\, dt = j(x,t)\, S\, dt$$

Nombre de neutrons sortant du barreau :

$$\delta N_{x+dx} = \phi_{x+dx}\, dt = \iint_S j(x+dx,t)\, dS\, dt = j(x+dx,t)\, S\, dt$$

Nombre de neutrons créés :

$$\delta N_p = \frac{n}{\tau} S\, dx\, dt$$

Bilan temporel :

$$N(x, t+dt) = N(x,t) + \delta N_x - \delta N_{x+dx} + \frac{n}{\tau} S\, dx\, dt$$

qui peut s'écrire :

$$n(x,t+dt)\, dx\, S = n(x,t)\, dx\, S + j(x,t)\, S\, dt - j(x+dx,t)\, S\, dt + \frac{n}{\tau} S\, dx\, dt$$

Après un DL au 1er ordre et simplification :

$$\frac{\partial n(x,t)}{\partial t} = -\frac{\partial j(x,t)}{\partial x} + \frac{n}{\tau}$$

Loi de Fick : $j(x,t) = - D \dfrac{\partial n(x,t)}{\partial x}$

$$\boxed{\frac{\partial n(x,t)}{\partial t} = D \frac{\partial^2 n(x,t)}{\partial x^2} + \frac{n(x,t)}{\tau}}$$

2° Régime permanent, l'équation devient : $\dfrac{\partial^2 n}{\partial x^2} + \dfrac{1}{D\tau} n = 0$

et admet pour solution :

$n(x,t) = A \cos kx + B \sin kx$ avec $k = \dfrac{1}{\sqrt{D\tau}}$

En $x = 0$ $n(0,t) = 0$ donc $A = 0$

En $x = L$ $n(L,t) = 0 = B \sin kL$

$\hookrightarrow B = 0$ ou $\sin kL = 0$

Donc pour avoir une solution non nulle il faut $kL = p\pi$

$\longrightarrow$ $\boxed{n(x,t) = B \sin \dfrac{p\pi}{L} x}$

$k = \dfrac{1}{\sqrt{D\tau}} = \dfrac{p\pi}{L}$ on a donc $L = p\pi\sqrt{D\tau}$

La plus petite longueur possible ($p = 1$, mode fondamental) est :

$L_s = \pi \sqrt{D\tau}$

Interprétation
- la création tend à augmenter n
- la diffusion + fuite aux bords tend à vider le barreau
- l'équilibre n'est possible que pour une taille adaptée

Ex 4 : Diffusion dans un cylindre

1° $\frac{\partial n}{\partial t} = - \frac{\partial j}{\partial x}$

2° $\frac{\partial n}{\partial t} = - \text{div}\, \vec{j}$

3° $D_V = \iint_S j(R_2)\, dS = j(R_2) \times S$ avec $S = 2\pi R_2 \ell$

$j(R_2) = \frac{D_V}{2\pi R_2 \ell} = 1{,}8 \cdot 10^{-5}\ m\ h^{-1}$

4° Régime permanent donc $\frac{\partial n}{\partial t} = 0$

$\text{div}\, \vec{j} = 0 = \frac{1}{r} \frac{\partial r j(r)}{\partial r}$

$\frac{\partial r j(r)}{\partial r} = 0$ conduit par intégration à :

$r j(r) = cte$ or on connaît $j(R_2)$

$R_2\, j(R_2) = \frac{D_V}{2\pi \ell} = cte$

$\longrightarrow \boxed{j(r) = \frac{D_V}{2\pi \ell r} = \frac{R_2\, j(R_2)}{r}}$

5° $n_0 = \frac{\text{nombre de molécules}}{\text{volume}} = \frac{n \times N_A}{V} = \frac{m \times N_A}{M \times V} = \frac{\rho N_A}{M}$

$\boxed{n_0 = 3{,}3 \cdot 10^{28}\ m^{-3}}$

6° A l'interface eau / paroi, il n'y a pas d'accumulation donc :

$\boxed{n(R_1) = n_0}$

7°

$$j(r) = -D \frac{dn}{dr}$$

$$j(R_2) \frac{R_2}{r} = -D \frac{dn}{dr}$$

$$\frac{dn}{dr} = -\frac{j(R_2) R_2}{D} \frac{1}{r}$$

$$n(r) = -\frac{j(R_2) R_2}{D} \ln r + C$$

or $n(R_1) = n_0$

$$n(r) = n_0 - \frac{j(R_2) R_2}{D} \ln \frac{r}{R_1}$$