

TD Conduction thermique

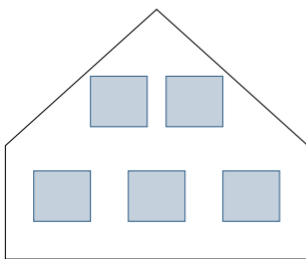
Résistances thermiques

Exercice 1 : Isolation d'un pignon

Document 1 : De la nécessité de l'isolation

Le secteur du bâtiment représente 44 % de l'énergie consommée en France, loin devant le secteur des transports (31 %). Chaque année, le secteur du bâtiment émet plus de 123 millions de tonnes de CO_2 , près du quart du total national, ce qui en fait l'un des domaines clé dans la lutte contre le réchauffement climatique et la transition énergétique. Pour rendre le bâtiment plus économe en énergie, il faut rénover massivement l'existant et développer des normes plus strictes en termes de consommation d'énergie pour les bâtiments neufs. C'est l'objet de la politique de l'énergie dans les bâtiments.

Extrait du site internet du Ministère de la Transition Écologique et Solidaire



Une famille souhaite isoler le pignon de sa maison. La maçonnerie est en béton ($\lambda_b = 1,5 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$), et a une surface (hors fenêtres) $S_m = 50 \text{ m}^2$ et une épaisseur $e_b = 15 \text{ cm}$. Il est percé de cinq fenêtres identiques, toutes de surface $S_f = 2 \text{ m}^2$, faites d'une épaisseur $e_v = 5 \text{ mm}$ de simple vitrage ($\lambda_v = 1,25 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$).

L'objectif de l'exercice est de comparer deux solutions d'isolation : ou bien recouvrir l'ensemble du béton cellulaire d'une couche de laine de verre, ou bien installer des fenêtres en double vitrage.

Donnée : $1/2,6 = 3,8$ et $1/12 = 0,08$.

- 1 - Établir l'expression de la résistance thermique R_{th} d'une paroi plane d'épaisseur e et de surface S . En déduire la résistance R_m du mur en béton et celle R_f d'une fenêtre.
- 2 - Exprimer la résistance thermique R du pignon non isolé et la calculer numériquement.
- 3 - La première possibilité est d'isoler la maçonnerie par une couche de laine de verre ($\lambda_{lv} = 4 \cdot 10^{-2} \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$) d'épaisseur $e_{lv} = 10 \text{ cm}$. Exprimer et calculer numériquement la résistance thermique R' du pignon isolé de la sorte.
- 4 - Le second choix d'isolation consiste à installer du double vitrage, composé de deux lames de verre d'épaisseur $e = 4 \text{ mm}$ entourant une couche d'air d'épaisseur $e' = 12 \text{ mm}$ ($\lambda_{air} = 2,5 \cdot 10^{-2} \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$), suffisamment fine pour que les mouvements de convection y soient négligeables. Calculer la résistance thermique R'_f d'une fenêtre en double vitrage.
- 5 - En déduire la résistance thermique R'' du pignon pour lequel toutes les fenêtres auraient été remplacées.
- 6 - Conclure : quels travaux faut-il envisager en priorité ?

Exercice 2 : Plancher chauffant



Un plancher chauffant est un système de chauffage des bâtiments par le sol dans lequel l'énergie de chauffage est transmise au plancher via un réseau hydraulique circulant sous le plancher (des systèmes de chauffage électrique existent également). Dans les constructions modernes, bien isolées, la température de l'eau peut être relativement basse, de l'ordre de 25°C , ce qui rend le plancher chauffant particulièrement adapté aux chauffages écologiques de nouvelle génération comme la géothermie et le chauffage solaire. Cet exercice a pour but d'étudier l'installation schématisée ci-dessous, destinée à chauffer une salle de vie de 40 m^2 au sol. Pour simplifier, on suppose que le réseau hydraulique impose la température $T = T_{\text{eau}}$ à l'interface entre l'isolant et le mortier.

air de la pièce ($T_{\text{air}} = 19^\circ\text{C}$)

④ carrelage
③ chape de mortier
② isolant
① dalle en béton

sol de fondation ($T_{\text{sol}} = 7^\circ\text{C}$)

Matériau	Conductivité λ ($\text{W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$)	Épaisseur e (cm)
④ Carrelage	1,3	1
③ Mortier	1,1	3
② Isolant	0,02	2
① Béton	1,4	10

On suppose un contact thermique parfait entre les différents matériaux de la construction. En revanche, les transferts thermiques entre le carrelage et l'air de la pièce sont décrits par la loi de Newton conducto-convective :

$$\vec{j}_{cc} = h(T_s - T_{\text{air}})\vec{u}$$

avec $h = 10 \text{ W} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{m}^{-2}$ le coefficient d'échange conducto-convectif, T_s la température de surface du carrelage et $\vec{u}$ un vecteur unitaire dirigé du carrelage vers l'air.

1 - Montrer que la loi de Newton se traduit par une résistance thermique d'interface R_i , dont on établira l'expression en fonction de h et S .

2 - Donner le schéma électrique équivalent de l'installation. En déduire la résistance thermique totale R entre la « couche » d'eau et l'air de la pièce. La calculer numériquement.

Dans une région au climat est assez doux (comme la Normandie!), une pièce de 40 m^2 bien isolée nécessite en hiver une puissance de chauffe de l'ordre de 1 kW , alors qu'une maison mal isolée consomme quatre fois plus.

3 - En déduire la température T_{eau} à laquelle se trouve l'eau du circuit de chauffage pour chauffer la maison bien isolée.

4 - Les normes d'installation d'un plancher chauffant imposent que la température de surface du carrelage T_s n'excède pas 28°C , ce qui correspond à la température de la plante des pieds. Quelle puissance maximale l'installation peut-elle fournir à l'habitation ? Commenter.

5 - Bien qu'une couche isolante soit placée sous les tuyaux de chauffage, une partie de l'énergie fournie par le plancher chauffant est perdue car cédée aux fondations. Proposer une définition du rendement du plancher chauffant et le calculer.

6 - Le choix du revêtement de sol est essentiel pour une bonne efficacité du plancher chauffant. En particulier, il est déconseillé d'utiliser un parquet en bois (conductivité de l'ordre de $0,2 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$). Proposer une explication.

Exercice 3 : Igloo

Quatre explorateurs sur la banquise construisent un igloo de rayon R pour s'abriter du froid. Les murs sont d'épaisseur $e = 50 \text{ cm}$ et chaque explorateur dégage une puissance de 50 W . L'igloo est fait de neige tassée de conductivité thermique $0,5 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$. Pour simplifier, on néglige tout transfert thermique par le sol.

1 - Déterminer le flux sortant d'une demi-sphère de rayon $R \leq r \leq R + e$.

2 - Établir l'expression de la résistance thermique de l'igloo.

3 - Les explorateurs ont-ils intérêt à construire un igloo de grande ou petite taille ?

4 - L'igloo a un rayon intérieur de 1 m et la température externe est de -10°C . Déterminer la température interne en régime permanent.

Exercice 4 : Géothermie

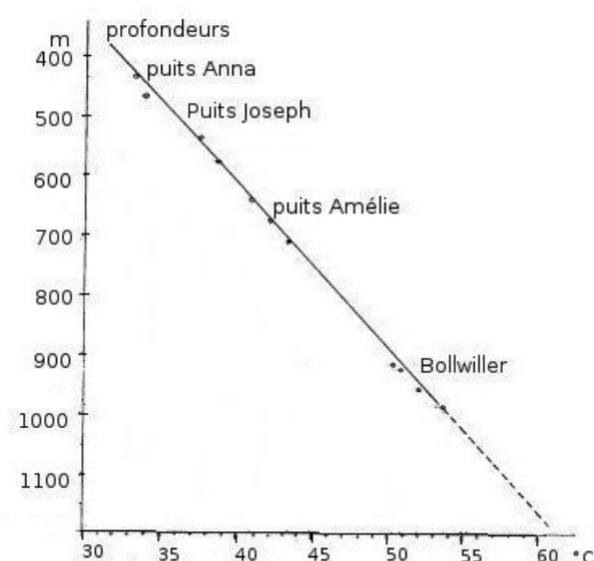


Figure 3 – Température en fonction de la profondeur. La courbe représente la température mesurée au fond de différents puits de mines alsaciens en fonction de leur profondeur.

La croûte continentale terrestre a une épaisseur moyenne de 30 km, limitée par la discontinuité de Moho. Sa conductivité thermique moyenne vaut $\lambda = 2,5 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$. Au niveau de la surface, la température vaut en moyenne $T_0 = 13^\circ \text{C}$. Les éléments radioactifs présents dans la croûte terrestre libèrent, en se désintégrant, une puissance volumique p supposée uniforme.

On néglige localement la courbure de la Terre et on se place en régime permanent : la température ne dépend que de la profondeur z , mesurée le long d'un axe vertical descendant.

1 - Établir l'équation différentielle régissant le champ de température $T(z)$.

2 - Combien de conditions aux limites sont nécessaires pour la résolution ? Les identifier, en s'aidant notamment de la figure 3.

3 - Procéder à la résolution et représenter graphiquement le profil de température.

4 - Estimer un ordre de grandeur de p sachant que la température au niveau de la discontinuité de Moho est de l'ordre de 600°C .

5 - Cette puissance libérée par la Terre peut être récupérée : c'est la géothermie. Déterminer le flux géothermique surfacique en Alsace. En déduire l'énergie potentiellement récupérable par géothermie sur un an. On estime pour cette région un potentiel solaire annuel de l'ordre de 1220 kWh/m^2 : commenter.

Exercice 5 : Ailette de refroidissement

Pour améliorer le refroidissement de circuits électroniques ou de moteurs, on y ajoute des ailettes de refroidissement en nombre et forme variés afin d'évacuer de la chaleur vers l'air ambiant par transfert conducto-convectif.



Figure 4 – Ailettes de refroidissement d'un processeur.

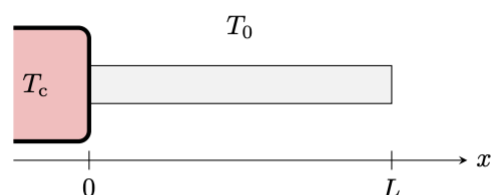


Figure 5 – Schéma de l'ailette étudiée.

On étudie ici une ailette parallélépipédique, de longueur L dans la direction x et de côtés a et b dans les directions y et z , faite d'un matériau de conductivité λ . Cette ailette est accolée au composant à refroidir, de température T_c , et placée dans l'air de température supposée uniforme T_0 . Les échanges entre l'ailette et l'air sont modélisés par la loi de Newton : le flux $d\varphi$ cédé à l'air par un élément de surface dS de l'ailette s'écrit

$$d\varphi = h(T - T_0) dS.$$

Hypothèses de travail :

- ▷ le régime est stationnaire ;
- ▷ la température est uniforme sur une section donnée de l'ailette ;
- ▷ l'ailette est en contact thermique parfait avec le matériau à refroidir ;
- ▷ la longueur de l'ailette est assimilée à une longueur infinie.

1 - Montrer que la température vérifie l'équation différentielle

$$\frac{d^2 T}{dx^2} - \frac{1}{\delta^2} T = -\frac{1}{\delta^2} T_0,$$

avec δ à exprimer en fonction des données. Préciser ce que signifie l'hypothèse d'ailette infinie.

2 - Résoudre cette équation différentielle.

3 - Calculer la puissance thermique totale dissipée par l'ailette.

4 - On observe sur la figure 4 plusieurs ailettes montées les unes à côté des autres. Quel en est l'intérêt par rapport à une seule ailette de plus grandes dimensions ? On pourra comparer la puissance dissipée par N^2 ailettes de dimensions latérales $a \times b$ à celui d'une unique ailette plus grande, de dimensions $Na \times Nb$.

Bilans thermiques divers et variés

Exercice 6 : Four industriel

Cet exercice s'intéresse au chauffage d'une pièce dans un four industriel. La pièce est cubique de côté a , faite d'un matériau de capacité thermique massique c_p , de conductivité thermique λ et de masse volumique ρ . La pièce est posée sur un tapis roulant de longueur L reliant les deux extrémités du four avançant à vitesse constante V_0 . La température de l'air à l'intérieur du four est uniformément égale à T_a . Dans le four, la pièce reçoit un flux surfacique $P_s = h(T_a - T)$ avec h une constante positive. L'objectif est de déterminer la vitesse V_0 du tapis pour que la pièce atteigne la température de consigne T_c .

1 - On suppose que la température de la pièce est uniforme. Déterminer $T(t)$.

2 - En déduire le temps nécessaire pour atteindre la température de consigne puis la vitesse V_0 en fonction de a .

3 - Établir l'équation de la chaleur à une dimension. En déduire un temps caractéristique de diffusion.

4 - En déduire une condition sur a impliquant λ , h et les températures pour que la température dans la pièce soit uniforme en sortie du four.

Exercice 7 : Gel d'un lac

On étudie la formation d'une couche de glace à la surface d'un lac. La température de l'air en surface est $T_s = -10^\circ\text{C}$ alors que l'eau liquide du lac est à sa température de fusion T_f . On note $e(t)$ l'épaisseur de la couche de glace à l'instant t et on suppose que $e(t=0) = 0$.

1 - Exprimer la densité de courant thermique j_Q dans la couche de glace en régime stationnaire en fonction de e notamment.

2 - On note de l'épaisseur de glace formée entre t et $t + dt$. Exprimer de en fonction de j_Q , de l'enthalpie de fusion de la glace ℓ et de sa masse volumique μ . En déduire une équation différentielle vérifiée par $e(t)$.

3 - Résoudre cette équation et déterminer l'épaisseur formée au bout d'une journée, d'une semaine et d'un mois. Commenter.

Données : caractéristiques de la glace.

- ▷ Conductivité thermique : $\lambda = 2,1 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$;
- ▷ Masse volumique : $\mu = 917 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$;
- ▷ Enthalpie de fusion : $\ell = 333 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$.