

TD Conduction thermique

Résistances thermiques

Exercice 1 : Isolation d'un pignon

- 1 Voir cours,

$$R_{th} = \frac{e}{\lambda S}.$$

On a alors

$$R_m = R_f = 2 \cdot 10^{-3} \text{ K} \cdot \text{W}^{-1}.$$

- 2 Les résistances thermiques du mur et des fenêtres sont montées en parallèle, donc

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_m} + \frac{5}{R_f} = 3000 \text{ W} \cdot \text{K}^{-1} \quad \text{donc} \quad R = \frac{1}{\frac{1}{R_m} + \frac{5}{R_f}} = 3,3 \cdot 10^{-4} \text{ K} \cdot \text{W}^{-1}.$$

- 3 Le béton et la laine de verre sont superposées, leurs résistances thermiques sont donc montées en série, ainsi

$$R'_m = R_m + \frac{e_{lv}}{\lambda_{lv} S} = 52 \cdot 10^{-3} \text{ K} \cdot \text{W}^{-1}.$$

La résistance thermique du mur est donc améliorée d'un facteur 6. Ainsi,

$$\frac{1}{R'} = \frac{1}{R'_m} + \frac{5}{R_f} = 2580 \text{ W} \cdot \text{K}^{-1} \quad \text{donc} \quad R' = \frac{1}{\frac{1}{R'_m} + \frac{5}{R_f}} = 3,87 \cdot 10^{-4} \text{ K} \cdot \text{W}^{-1}.$$

Une fois les fenêtres prises en compte, les travaux n'améliorent la résistance thermique que d'environ 15%.

- 4 Les deux lames de verre et la couche d'air sont montées en série, donc

$$R'_f = \frac{2e}{\lambda_v S_f} + \frac{e'}{\lambda_{air} S_f} = 2,4 \cdot 10^{-1} \text{ K} \cdot \text{W}^{-1} \simeq 0,25 \text{ K} \cdot \text{W}^{-1}.$$

- 5 Finalement,

$$R'' = \frac{1}{\frac{1}{R_m} + \frac{5}{R'_f}} = 2 \cdot 10^{-3} \text{ K} \cdot \text{W}^{-1}.$$

- 6 Pas beaucoup de doute à avoir : il vaut mieux changer les fenêtres car la résistance thermique est bien plus grande!

Cette conclusion est largement vérifiée en pratique ... même s'il ne faut pas oublier le toit, qui joue également un rôle crucial dans l'isolation d'une maison.

Exercice 2 : Plancher chauffant

- 1 Le flux thermique conducto-convectif cédé à l'air à la surface du carrelage vaut

$$\Phi_{cc} = \iint \vec{j}_{cc} \cdot d\vec{S} = hS(T_s - T_{air}),$$

ce qui permet d'identifier la résistance thermique d'interface

$$R_i = \frac{T_s - T_{air}}{\Phi_{cc}} \quad \text{soit} \quad R_i = \frac{1}{hS}.$$

- 2 L'hypothèse de contact thermique parfait consiste à supposer qu'il y a **continuité de la température** à l'interface entre deux matériaux, ce qui revient à dire que la résistance thermique d'interface est nulle. On en déduit le schéma électrique équivalent de la figure 1. Le circuit d'eau n'est pas modélisé par une résistance thermique, en revanche il impose la température T_{eau} entre l'isolant et la chape de mortier. Comme la température joue un rôle analogue au potentiel électrique, imposer une température en un point revient à placer un générateur entre ce point et la masse.

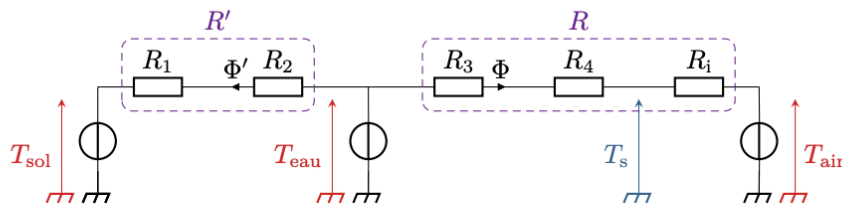


Figure 1 – Schéma électrique équivalent à l'installation. On note R_p l'indice du matériau numéroté p .

Ainsi, les résistances R_3 de la chape de mortier, R_4 du carrelage et R_i d'interface sont toutes traversées par le même flux, donc montées en série. On en déduit la résistance totale

$$R = R_3 + R_4 + R_i$$

En utilisant l'expression de la résistance thermique d'une plaque plane $R_p = e_p / \lambda_p S$, on en déduit

$$R = \frac{e_3}{\lambda_3 S} + \frac{e_4}{\lambda_4 S} + \frac{1}{hS} = 3,3 \cdot 10^{-3} \text{ K} \cdot \text{W}^{-1}.$$

- 3 La puissance thermique Φ fournie par le plancher chauffant à l'air de la pièce est reliée aux températures par

$$\Phi = \frac{T_{eau} - T_{air}}{R} \quad \text{soit} \quad T_{eau} = T_{air} + R\Phi = 22,4^\circ\text{C}.$$

La température est nettement plus faible que celle d'un radiateur traditionnel, ce qui s'explique par la grande surface du plancher chauffant.

- 4 La résistance R_i est également traversée par le flux Φ , donc avec le même raisonnement que précédemment,

$$\Phi = \frac{T_s - T_{air}}{R_i}$$

Pour $T_i = T_{max}$, on a alors

$$\Phi_{max} = \frac{T_{max} - T_{air}}{R_i} = 3,6 \text{ kW}.$$

Ainsi, un plancher chauffant ne suffira pas à chauffer une pièce mal isolée ... ce qui n'est en pratique pas gênant, car un plancher chauffant ne peut pas être installé en rénovation mais uniquement en construction neuve.

En outre, une puissance limitée peut aussi poser des difficultés au démarrage du chauffage dans une pièce froide, car cela augmente évidemment le temps nécessaire pour atteindre la température souhaitée.

5 Le rendement du plancher chauffant peut être défini comme le rapport entre la puissance Φ réellement fournie à l'habitation et la puissance totale $\Phi + \Phi'$ fournie par l'eau chaude,

$$\eta = \frac{\Phi}{\Phi + \Phi'}.$$

En utilisant les températures et les résistances thermiques,

$$\eta = \frac{\frac{T_{\text{eau}} - T_{\text{air}}}{R}}{\frac{T_{\text{eau}} - T_{\text{air}}}{R} + \frac{T_{\text{eau}} - T_{\text{sol}}}{R'}} = \frac{T_{\text{eau}} - T_{\text{air}}}{T_{\text{eau}} - T_{\text{air}} + \frac{R}{R'}(T_{\text{eau}} - T_{\text{sol}})} \quad \text{d'où} \quad \eta = \frac{1}{1 + \frac{R}{R'} \frac{T_{\text{eau}} - T_{\text{sol}}}{T_{\text{eau}} - T_{\text{air}}}}.$$

Numériquement,

$$R' = \frac{e_1}{\lambda_1 S} + \frac{e_2}{\lambda_2 S} = 2,7 \cdot 10^{-2} \text{ K} \cdot \text{W}^{-1} \quad \text{d'où} \quad \eta = 64 \%.$$

6 Le bois est un conducteur thermique nettement moins bon que le carrelage. C'est un avantage en isolation, mais pas ici. Qualitativement pour une même puissance de chauffe Φ , si la résistance thermique R augmente, alors il faudra augmenter la température T_{eau} de l'eau pour fournir la même puissance thermique à la pièce à chauffer ... mais comme la résistance R' n'est pas modifiée, alors la puissance thermique cédée au sol augmente nécessairement, ce qui a pour effet de **diminuer le rendement** de l'installation. Autrement dit, en mettant du parquet à la place du carrelage, il faut chauffer l'eau davantage, ce qui est plus coûteux en énergie, et ce surplus d'énergie apporté se retrouve entièrement perdu dans le sol.

Exercice 3 : Igloo

1 Entre t et $t + dt$, la demi-sphère considérée reçoit un transfert thermique

$$\delta Q_{\text{int}} = 4\mathcal{P} dt$$

produit par les quatre explorateurs ($\mathcal{P} = 50 \text{ W}$) et cède à l'extérieur un transfert thermique

$$\delta Q_{\text{ext}} = \Phi dt$$

avec Φ le flux thermique sortant de la surface considérée. En régime permanent, le bilan enthalpique s'écrit donc

$$dH = 0 = 4\mathcal{P} dt - \Phi dt \quad \text{d'où} \quad \Phi = 4\mathcal{P}.$$

Le flux thermique Φ est donc **indépendant du rayon r de la surface considérée**.

2 Dans la demi-sphère, le vecteur densité de courant thermique s'écrit

$$\vec{j} = j_r(r) \vec{u}_r.$$

Le flux sortant au travers d'une demi-sphère de rayon r s'exprime donc

$$\Phi = j_r(r) \times \frac{4\pi r^2}{2}.$$

Or d'après la loi de Fourier, avec ces symétries,

$$\vec{j} = -\lambda \frac{dT}{dr} \vec{u}_r,$$

d'où on déduit

$$\Phi = -\lambda \frac{dT}{dr} 2\pi r^2 \quad \text{soit} \quad \frac{dT}{dr} = -\frac{\Phi}{2\pi r^2 \lambda}.$$

On peut alors séparer les variables,

$$dT = -\frac{\Phi}{2\pi\lambda} \frac{dr}{r^2},$$

puis intégrer

$$\int_{T_{\text{int}}}^{T_{\text{ext}}} dT = -\frac{\Phi}{2\pi\lambda} \int_R^{R+e} \frac{dr}{r^2}$$

ce qui donne

$$T_{\text{ext}} - T_{\text{int}} = -\frac{\Phi}{2\pi\lambda} \left(-\frac{1}{R+e} + \frac{1}{R} \right).$$

Par définition de la résistance thermique, on identifie

$$\mathcal{R}_{\text{igloo}} = -\frac{1}{2\pi\lambda} \left(\frac{1}{R+e} - \frac{1}{R} \right) \quad \text{soit} \quad \boxed{\mathcal{R}_{\text{igloo}} = \frac{1}{2\pi\lambda} \frac{e}{R(R+e)} > 0.}$$

La démonstration utilise implicitement le fait que Φ est indépendant de r pour le sortir de l'intégrale dans la séparation de variable, ce qui a été établi dans la première question.

3 D'après la question précédente, la résistance thermique de l'igloo est d'autant plus grande que le rayon R est petit : **les explorateurs ont donc intérêt à construire un petit igloo.**

La dépendance en e à R fixée est moins évidente à constater (il faut ou bien tracer, ou bien dériver), mais comme on pouvait s'y attendre la résistance thermique augmente avec e même s'il n'y a pas proportionnalité comme dans le cas cartésien.

4 D'après la question 1, $\Phi = 4\mathcal{P}$. En utilisant la résistance thermique,

$$\boxed{T_{\text{int}} = T_{\text{ext}} + 4\mathcal{P}\mathcal{R}_{\text{igloo}} = 11^\circ\text{C} .}$$

Bilans mésoscopiques

Exercice 4 : Géothermie

1 Considérons la tranche mésoscopique de hauteur dz et de section S schématisée figure 2.

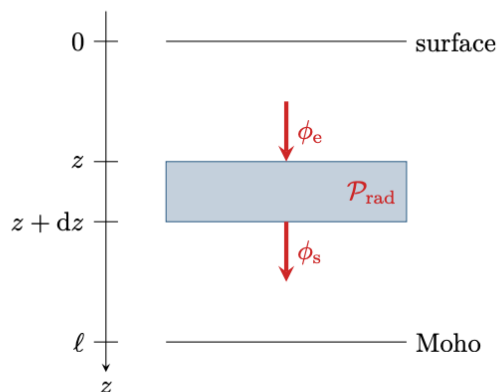


Figure 2 – Tranche infinitésimale de croûte terrestre.

• **Bilan des transferts thermiques :** pendant une durée dt , elle échange
 > un transfert thermique entrant par la face située en z

$$\delta Q_e = \phi_e dt = j_z(z) S dt$$

> un transfert thermique sortant par la face située en $z + dz$

$$\delta Q_s = \phi_s dt = j_z(z + dz) S dt$$

> un transfert thermique effectif fourni par les désintégrations radioactives

$$\delta Q_{\text{rad}} = \mathcal{P}_{\text{rad}} dt = p S dz dt .$$

Comme $T_M > T_0$, alors les transferts thermiques sont dirigés du Moho vers la surface ... donc dans le sens contraire à celui dans lequel j'ai orienté les flux ... et ce n'est pas grave!! Pour ne pas se tromper, mieux vaut orienter les flux dans le sens de l'axe plutôt que dans leur sens réel ... mais il ne faut **SURTOUT PAS** rajouter un signe $\ominus$ « à la main », même si c'est peut être très tentant! La raison profonde à tout ceci est le caractère algébrique des flux : les conventions choisies ici imposent simplement $\phi_e, \phi_s < 0$ et $j_z < 0$.

- **Bilan d'enthalpie** : en régime permanent,

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{RP}}}{dH} = 0 = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{1er P}}}{j_z(z)} S dt - j_z(z + dz) S dt + p S dz dt.$$

Par un développement limité, on obtient

$$-\frac{dj_z}{dz} dz S dt + p S dz dt = 0,$$

et en utilisant la loi de Fourier,

$$j_z = -\lambda \frac{dT}{dz} \quad \text{d'où} \quad \boxed{\lambda \frac{d^2 T}{dz^2} + p = 0}.$$

2 S'agissant d'une équation différentielle du second ordre, deux conditions aux limites sont nécessaires pour la résolution. La première est immédiate :

$$T(z=0) = T_0.$$

La deuxième est moins simple. En exploitant la courbe donnée, on peut estimer la dérivée au voisinage de la surface :

$$\gamma = \frac{dT}{dz}(z=0) \simeq \frac{53 - 33}{1000 - 400} = 0,03 \text{ K} \cdot \text{m}^{-1}.$$

Le gradient géothermique est variable en fonction du lieu où l'on se trouve à la surface terrestre, souvent compris entre 10 et 30 K · km⁻¹, mais potentiellement beaucoup plus dans les régions volcaniques.

3 L'équation se réécrit

$$\frac{d^2 T}{dz^2} = -\frac{p}{\lambda} \quad \text{donc} \quad \frac{dT}{dz} = -\frac{p}{\lambda} z + A,$$

et avec la première condition limite,

$$\frac{dT}{dz}(z=0) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{CL}}}{=} \gamma \underset{\substack{\uparrow \\ \text{expr}}}{=} A$$

Par une deuxième intégration,

$$\frac{dT}{dz} = -\frac{p}{\lambda} z + \gamma \quad \text{d'où} \quad T(z) = -\frac{p}{2\lambda} z^2 + \gamma z + B.$$

et avec la seconde condition aux limites,

$$T(z=0) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{CL}}}{=} T_0 \underset{\substack{\uparrow \\ \text{expr}}}{=} B$$

ce qui donne finalement

$$T(z) = -\frac{p}{2\lambda} z^2 + \gamma z + T_0.$$

Le profil de température est donc parabolique. Comme il est physiquement évident que la température est forcément une fonction monotone dans la croûte terrestre, on en déduit l'allure de la figure 4 qui ne présente pas de maximum.

La concavité de la courbe est donnée par la dérivée seconde $-p/\lambda < 0$: la dérivée diminue avec z , donc la température est « de moins en moins croissante ».

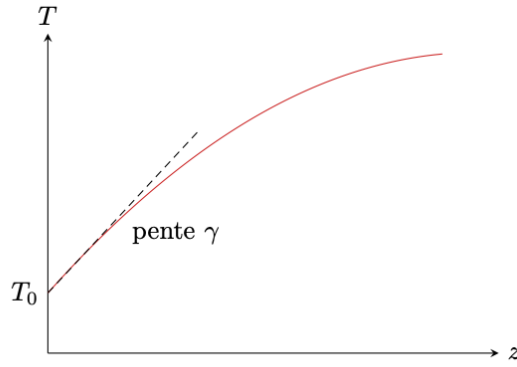


Figure 3 – Profil de température dans la croûte terrestre.

- 4** Par extrapolation du profil de température à une profondeur $h = 30$ km,

$$T_M = -\frac{p}{2\lambda}h^2 + \gamma h + T_0 \quad \text{soit} \quad \frac{p}{2\lambda}h^2 = T_0 + \gamma h - T_M.$$

et ainsi

$$p = \frac{2\lambda}{h^2}(T_0 + \gamma h - T_M) = 17 \mu\text{W} \cdot \text{m}^{-3}.$$

Notre modèle très simple donne un résultat un peu supérieur à la valeur communément admise de $10 \mu\text{W} \cdot \text{K}^{-1}$. L'écart s'explique par le fait que la concentration en éléments radioactifs et donc la puissance qu'ils libèrent n'est pas uniforme avec la profondeur.

- 5** Par flux géothermique « surfacique », il faut comprendre qu'on se ramène à $S = 1 \text{ m}^2$... ou qu'on calcule directement $\|\vec{j}\|$. D'après la loi de Fourier,

$$\|\vec{j}(z=0)\| = \lambda \frac{dT}{dz}(z=0) = \lambda \gamma \simeq 0,1 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}.$$

En un an, cela donne une énergie potentiellement récupérable sur un an de l'ordre de

$$\mathcal{E} = 0,1 \times (365 \times 24 \times 3600) = 3,15 \cdot 10^6 \text{ J} \cdot \text{m}^{-2}.$$

Sachant que $1 \text{ kWh} = 3,6 \cdot 10^6 \text{ J}$, on en déduit

$$\mathcal{E} = 0,9 \text{ kW} \cdot \text{h} \cdot \text{m}^{-2},$$

ce qui est très inférieur au potentiel solaire.

Contrairement aux apparences, l'Alsace est pourtant une région très adaptée à la géothermie et dans laquelle celle-ci est largement développée. Cela s'explique notamment par le très bon rendement des dispositifs permettant de récupérer la chaleur géothermique, nettement supérieur à celui des panneaux solaires, et qui peuvent couvrir une plus grande surface en exploitant par exemple des nappes phréatiques.

Exercice 5 : Ailette de refroidissement

Compte tenu des hypothèses, la température ne dépend que de la variable x , $T = T(x)$, et donc $\vec{j} = j_x(x)\vec{e}_x$.

- 1** Raisonnons sur la tranche mésoscopique d'ailette située entre x et $x + dx$. Procédons à un bilan thermique entre t et $t + dt$:

- ▷ par la face située en x , elle reçoit $\delta Q_e = j_x(x) \times ab \, dt$;
- ▷ par la face située en $x + dx$, elle cède $\delta Q_s = j_x(x + dx) \times ab \, dt$;
- ▷ par les parois latérales, elle cède $\delta Q_{\text{lat}} = h(T(x) - T_0) \times (2a + 2b)dx \, dt$.

D'après le premier principe en régime stationnaire,

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{1er P}}}{dH} = \delta Q_e - \delta Q_s - \underset{\substack{\uparrow \\ \text{stat}}}{\delta Q_{\text{lat}}} = 0 \quad \text{d'où} \quad j_x(x)ab - j_x(x + dx)ab - 2h(T(x) - T_0)(a + b)dx = 0$$

et par un développement limité et en simplifiant par dx ,

$$0 = -\frac{dj_x}{dx}ab - h(T(x) - T_0)(2a + 2b).$$

D'après la loi de Fourier :

$$\lambda ab \frac{d^2 T}{dx^2} - 2h(a + b)T(x) = -2h(a + b)T_0$$

ce qui conduit au résultat

$$\boxed{\frac{d^2 T}{dx^2} - \frac{1}{\delta^2} T = -\frac{1}{\delta^2} T_0 \quad \text{avec} \quad \delta = \sqrt{\frac{\lambda ab}{2h(a + b)}}.}$$

La grandeur δ s'interprète comme la longueur caractéristique de variation de la température dans l'ailette. Supposer l'ailette « infinie » signifie concrètement $L \gg \delta$.

2 Les racines du polynôme caractéristique sont $r_{\pm} = \pm 1/\delta$. On en déduit

$$T(x) = T_0 + A e^{-x/\delta} + B e^{x/\delta} \quad \text{avec} \quad A, B = \text{cte.}$$

Attention à ne pas confondre avec un oscillateur harmonique, qui a presque la même équation différentielle ... au signe près.

La température ne pouvant diverger lorsque $x \rightarrow \infty$, on a nécessairement $B = 0$. L'ailette et le composant étant en contact thermique parfait en $x = 0$,

$$T(x=0) = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{CL}}}{T_c} = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{sol}}}{T_0} + A \quad \text{d'où} \quad A = T_c - T_0.$$

Finalement,

$$T(x) = T_0 + (T_c - T_0) e^{-x/\delta}.$$

3 Par définition, la puissance totale dissipée par l'ailette vaut

$$\mathcal{P} = \int_0^{+\infty} d\varphi(x) = \int_0^{+\infty} h(T_c - T_0) e^{-x/\delta} 2(a + b) dx.$$

Ainsi,

$$\mathcal{P} = 2h(a + b)(T_c - T_0) \int_0^{\infty} e^{-x/\delta} dx = 2h(a + b)(T_c - T_0) \left[-\delta e^{-x/\delta} \right]_0^{\infty} = 2h(a + b) \sqrt{\frac{\lambda ab}{2h(a + b)}} (T_c - T_0)$$

et finalement

$$\boxed{\mathcal{P} = \sqrt{2h(a + b)ab\lambda} (T_c - T_0).}$$

4 Les deux dispositions proposées par l'énoncé occupent environ la même surface de composant (en négligeant la surface vide entre les ailettes). Pour N^2 ailettes,

$$\mathcal{P}_{\text{tot}} = N^2 \mathcal{P} = N^2 \sqrt{2h(a + b)ab\lambda} (T_c - T_0).$$

Pour une seule grande ailette,

$$\mathcal{P}'_{\text{tot}} = \sqrt{2h(Na + Nb)NaNb\lambda} (T_c - T_0) = N \sqrt{N} \mathcal{P}.$$

Ainsi,

$$\frac{\mathcal{P}_{\text{tot}}}{\mathcal{P}'_{\text{tot}}} = \sqrt{N}.$$

La puissance dissipée par l'association de plusieurs ailettes est supérieure à celle dissipée par une unique ailette de grande section, car la surface de contact entre l'air et les ailettes est globalement plus importante.

Bilans thermiques divers et variés

Exercice 6 : Four industriel

1 Procédons à un bilan enthalpique pour la pièce entre t et $t + dt$. La surface de la pièce vaut $6a^2$, donc elle reçoit le flux thermique

$$P = P_s \times 6a^2 = 6a^2 h(T_a - T).$$

Ainsi,

$$\frac{dH}{dt} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Joule}}}{=} \rho a^3 c_p \underset{\substack{\uparrow \\ \text{1er P}}}{\frac{dT}{dt}} = 6a^2 h(T_a - T)$$

d'où on déduit

$$\rho a c_p \frac{dT}{dt} + 6hT = 6hT_a \quad \text{soit} \quad \boxed{\frac{dT}{dt} + \frac{6h}{\rho a c_p} T = \frac{6h}{\rho a c_p} T_a.}$$

En posant $\tau = \rho a c_p / 6h$ et T_0 la température initiale de la pièce, cette équation différentielle se résout en

$$\boxed{T(t) = T_a + (T_0 - T_a) e^{-t/\tau}.$$

2 Par définition, $T(t=\tau_c) = T_c$, c'est-à-dire

$$T_c = T_a + (T_0 - T_a) e^{-\tau_c/\tau} \quad \text{soit} \quad e^{-\tau_c/\tau} = \frac{T_c - T_a}{T_0 - T_a}$$

d'où on déduit

$$\tau_c = -\tau \ln \frac{T_c - T_a}{T_0 - T_a}$$

et en inversant le ln et en remplaçant τ par son expression, il vient enfin

$$\boxed{\tau_c = \frac{\rho a c_p}{6h} \ln \frac{T_0 - T_a}{T_c - T_a}.$$

Ce temps τ_c correspond à la durée que la pièce doit passer dans le four. Sachant que le tapis roulant a une longueur L , on doit avoir $\tau_c = L/V_0$ d'où

$$\boxed{V_0 = \frac{6hL}{\rho a c_p \ln \frac{T_0 - T_a}{T_c - T_a}}.$$

3 Cf. cours pour la démonstration, on aboutit à

$$\boxed{\frac{\partial T}{\partial t} = D \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad \text{avec} \quad D = \frac{\lambda}{\rho c}.$$

Par analyse dimensionnelle de l'équation de diffusion, on trouve $[D] = L^2 T^{-1}$. Cherchons par analyse dimensionnelle le temps τ_d caractéristique de la diffusion sur une longueur a , en le prenant sous la forme

$$\tau_d = D^\alpha a^\beta$$

avec les exposants α et β constants. L'équation aux dimensions s'écrit

$$T = L^{2\alpha} T^{-\alpha} \times L^\beta$$

d'où on déduit par identification

$$\begin{cases} 1 = -\alpha \\ 0 = 2\alpha + \beta \end{cases} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} \alpha = -1 \\ \beta = 2 \end{cases}$$

si bien que

$$\tau_d = \frac{a^2}{D}.$$

4 Pour que la température de la pièce soit uniforme en sortie du four, il faut avoir

$$\tau_d \ll \tau_c \quad \text{donc} \quad \frac{a^2 \rho c_p}{\lambda} \ll \frac{\rho a c_p}{6h} \ln \frac{T_0 - T_a}{T_c - T_a} \quad \text{soit} \quad a \ll \frac{\lambda}{6h} \ln \frac{T_0 - T_a}{T_c - T_a}.$$

Exercice 7 : Gel d'un lac

1 En régime stationnaire, le plus simple est d'utiliser la résistance thermique. En notant S la surface de glace, la couche d'épaisseur e a une résistance thermique

$$R = \frac{e}{\lambda S}.$$

Le flux Φ au travers de la couche de glace vaut donc

$$\Phi = \frac{T_f - T_s}{R} = \frac{\lambda S (T_f - T_s)}{e}.$$

Or par définition $\Phi = j_Q S$ d'où on déduit

$$j_Q = \frac{\lambda (T_f - T_s)}{e}.$$

Compte tenu du sens dans lequel j'ai choisi d'orienter la différence de température, cette densité de courant thermique est orientée vers le haut, de l'eau du lac vers l'air.

Une autre méthode possible consiste à commencer par déterminer le profil de température $T(z)$ dans la glace à partir de l'équation de diffusion en régime stationnaire $\Delta T = \frac{d^2 T}{dz^2} = 0$ et des conditions aux limites, puis d'utiliser la loi de Fourier.

2 Supposons le régime quasi-stationnaire, et procédons à un bilan enthalpique pour la couche infinitésimale d'eau de surface S qui gèle entre t et $t + dt$, de masse $\mu S de$. Elle ne reçoit pas de transfert thermique de la part de l'eau du lac, car elle est à la même température, et cède le transfert thermique $j_Q S dt$ à la glace. Ainsi,

$$dH = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{1er ppe}}}{0} - j_Q S dt = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{gel}}}{-\mu S de} \ell$$

car l'enthalpie de solidification est l'opposée de l'enthalpie de fusion. Ainsi,

$$\frac{\lambda (T_f - T_s)}{e} S dt = \mu S \ell de$$

d'où on déduit finalement

$$\frac{de}{dt} = \frac{\lambda (T_f - T_s)}{\mu \ell e}.$$

3 Procédons par séparation des variables,

$$e \, de = \frac{\lambda(T_f - T_s)}{\mu \ell} dt$$

soit en intégrant

$$\int_{e(0)}^{e(t)} e \, de = \frac{\lambda(T_f - T_s)}{\mu \ell} \int_0^t dt$$

d'où

$$\frac{1}{2} [e(t)^2 - 0] = \frac{\lambda(T_f - T_s)}{\mu \ell} t$$

et ainsi

$$e(t) = \sqrt{\frac{2\lambda(T_f - T_s)}{\mu \ell} t}.$$

Numériquement, l'épaisseur vaut 11 cm au bout d'une journée, 29 cm au bout d'une semaine et 60 cm au bout d'un mois. C'est donc dans les premiers jours de gel que la couche de glace se forme le plus rapidement : comme on le constate sur l'expression de R , la couche de glace joue le rôle d'un isolant d'autant plus performant qu'il est épais.