

DS n°5

Exercice n°1 (sur 3,5 points)

- 1) Donner la définition de suites adjacentes.
- 2) Exprimer à l'aide de quantificateurs la proposition : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = L$ avec $L < \infty$
- 3) Soit la suite u_n définie par : $u_{n+1} = f(u_n)$ avec u_0 donné et f une fonction dérivable.
 - a) Si f est croissante, que peut-on en déduire pour (u_n) ?
 - b) Et si f est décroissante ?
 - c) Donner la définition d'un point fixe pour f , et préciser le lien avec la suite (u_n) .

Exercice n°2 (sur 5 points)

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle, on suppose que $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$, $(u_{n^2})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ convergent.

- 1) Justifier le fait que $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$, $(u_{n^2})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ soient des suites extraites de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$
- 2) a) A l'aide de la suite $(u_{4n^2})_{n \in \mathbb{N}}$, démontrer que $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(u_{n^2})_{n \in \mathbb{N}}$ ont la même limite.
b) Démontrer de même que $(u_{n^2})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ ont la même limite.
- 3) Que peut-on conclure pour $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$?

Exercice n°3 (sur 3,5 points)

Soit $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $w_0 = 2$ et $w_{n+1} = 3w_n + 2$

Déterminer l'expression de w_n en fonction de n .

Problème (sur 8 points)

Pour tout entier n supérieur ou égal à 1, on définit la fonction f_n par :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, f_n(x) = x^n + 9x^2 - 4$$

- 1) Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ n'a qu'une seule solution strictement positive, notée u_n
- 2) Calculer u_1 et u_2
- 3) Vérifier que $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n \in]0, \frac{2}{3}[$
- 4) Montrer que : $\forall x \in]0, 1[, f_{n+1}(x) < f_n(x)$
- 5) En déduire le signe de $f_n(u_{n+1})$, puis les variations de u_n
- 6) Montrer que la suite (u_n) est convergente, on note L cette limite.
- 7) Déterminer la limite de $(u_n)^n$ lorsque n tend vers $+\infty$
- 8) Donner enfin la valeur de L