

DS 6

Calculatrices et tout objets connectés interdits. Merci d'encadrer les résultats.

Exercice n°1 (sur 4 points)

Si f est une fonction réelle définie sur une partie A de $\mathbb{R}$, on appelle point fixe de f tout réel a de A tel que $f(a) = a$

- 1) Déterminer les points fixes de la fonction f définie par $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x$
- 2) a) La fonction $\exp$ admet-elle un point fixe dans $\mathbb{R}$? Justifier.
b) On note (u_n) la suite définie par : $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \exp(u_n)$
La suite (u_n) est-elle convergente ? Justifier et déterminer l'éventuelle limite.

Exercice n°2 (sur 3 points)

- 1) Soient x_1, x_2 et x_3 les zéros de $X^3 + pX + q$ avec $(p, q) \in \mathbb{R}^2$
 - a) Calculer $x_1 + x_2 + x_3$
 - b) Calculer $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$
- 2) Soit $P = 1 + X(X+1)(X+2)(X+3)$
 - a) Calculer le reste de la division euclidienne de P par P' (où P' désigne le polynôme dérivé)
 - b) Montrer que P' est divisible par ce reste
 - c) En déduire que P est divisible par P'

Problème n°1 (sur 8 points)

On définit la fonction cotangente hyperbolique, notée $\coth$, par : $\coth(x) = \frac{\cosh(x)}{\sinh(x)}$

- 1) Déterminer l'ensemble de définition de $\coth$
- 2) Montrer que $\coth$ est impaire
- 3) Résoudre l'équation $\coth(x) = 1$
- 4) Déterminer l'ensemble de dérivabilité de $\coth$
- 5) Déterminer $\coth'$ en fonction de $\sinh$ puis en fonction de $\coth$
- 6) Déterminer une primitive de $\coth$
- 7) Etablir que $\coth$ réalise une bijection de $]0, +\infty[$ sur $]1, +\infty[$, on note $\operatorname{Argcoth}$ cette bijection réciproque
- 8) Justifier que $\operatorname{Argcoth}$ est dérivable sur $]1, +\infty[$
- 9) Montrer que $\forall x \in]1, +\infty[, \operatorname{Argcoth}'(x) = \frac{1}{1-x^2}$
- 10) Exprimer $\operatorname{Argcoth}(x)$ en fonction de x

Problème n°2 (sur 5 points)

Soit $f : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}$ l'application définie par $f(z) = z + \frac{1}{z}$

- 1) Déterminer le ou les antécédents de -1 par f . L'application f est-elle injective ?
- 2) Démontrer que f est surjective.
- 3) Soit n entier naturel, montrer qu'il existe un unique polynôme P de $\mathbb{C}[X]$ tel que : $\forall z \in \mathbb{C}^*, P(z + \frac{1}{z}) = z^n + \frac{1}{z^n}$
- 4) Montrer que toutes les racines de P sont réelles, simples et dans $[-2; 2]$