Chapitre 4 : Fonctions usuelles

I. Fonctions usuelles

1) Logarithme Népérien

On appelle logarithme Népérien et on note ln l'unique primitive de x→ $\frac{1}{x}$ sur ℝ *+ qui s'annule en 1

Propriété :
Pour tout x>0 et y>0, ln(xy) = ln(x) + ln(y)

*Démonstration, pour y fixé, soit f définie sur ℝ *+ par f(x) = ln(xy)*
Sa dérivée est : $\frac{y}{xy} = \frac{1}{x}$
Donc les fonctions ln(xy) et ln(x) ont leurs dérivées égales donc elles ne diffèrent que d'une constante, ainsi : $\exists C \in \mathbb{R}$, *ln(xy) = ln(x) +C*
Pour x=1, on obtient ln(y) = C
Finalement : ln(xy) = ln(x)+ln(y)

Remarque : En découlent les relations pour x>0, $\ln(\frac{1}{x}) = -\ln(x)$
Et pour tout x>0 et y>0, $\ln(\frac{x}{y}) = \ln(x) - \ln(y)$

On a : $\lim_{x\to 0} \ln(x) = -\infty$ et $\lim_{x\to +\infty} \ln(x) = +\infty$

Démonstration : Comme la fonction ln est croissante, on sait déjà que $\lim_{x\to+\infty} ln(x)$, *existe, appelons la L, et vaut donc soit un nombre, soit +∞*
Pour tout entier naturel, examinons $ln(2^n) = n ln(2)$ *or* $\lim_{n\to+\infty} n ln(2) = +\infty$ *(car ln est croissante et ln(1) = 0, donc ln(2)>0)*
Donc $\lim_{n\to\infty} ln\,(2^n) = +\infty$, *or si* $\lim_{x\to+\infty} ln(x) = L$, *par unicité de la limite L=+∞*

On dit que la fonction ln est une bijection strictement croissante de ℝ *+ sur ℝ
C'est-à-dire que pour tout y de ℝ, il existe un unique antécédent x de ℝ *+par ln.
La notion de bijection sera revue plus précisément au paragraphe suivant.

Démonstration : Il s'agit d'une application du TVI, avec unicité de l'antécédent du fait de la stricte croissance de f.

2) Exponentielle

On appelle exponentielle et on note exp la fonction réciproque de ln.
La fonction exponentielle est donc une bijection strictement croissante de ℝ sur ℝ *+

On a : $\forall(x;y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{*+}$ $y = \exp(x) \Leftrightarrow x = \ln(y)$

Démonstration : Evidente puisque ln est **est une bijection strictement croissante de ℝ *+ sur ℝ.**

En particulier : $\lim_{x \to -\infty} \exp(x) = 0$ et $\lim_{x \to +\infty} \exp(x) = +\infty$

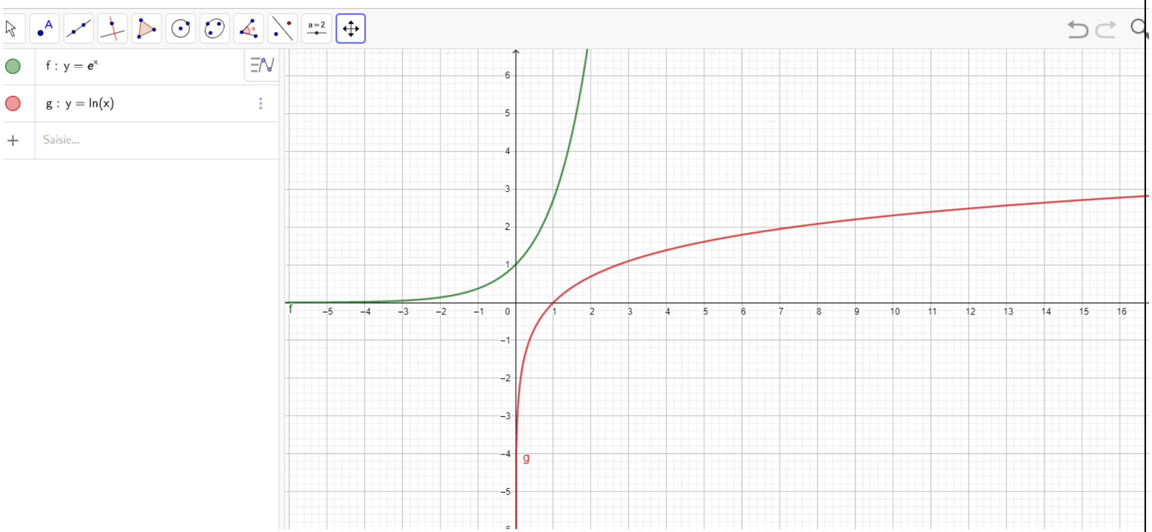
La fonction exp est dérivable sur $\mathbb{R}$, continue sur $\mathbb{R}$, et (exp(x))' = exp(x)

Démonstration : Dans le cas général des fonctions réciproques.

Pour tous réels x,y on a exp(x+y) = exp(x)exp(y)

Démonstration : soit u=exp(x) et v=exp(y)
exp(x+y) = exp(lnu+lnv) = exp(ln(uv))=uv=exp(x)exp(y)

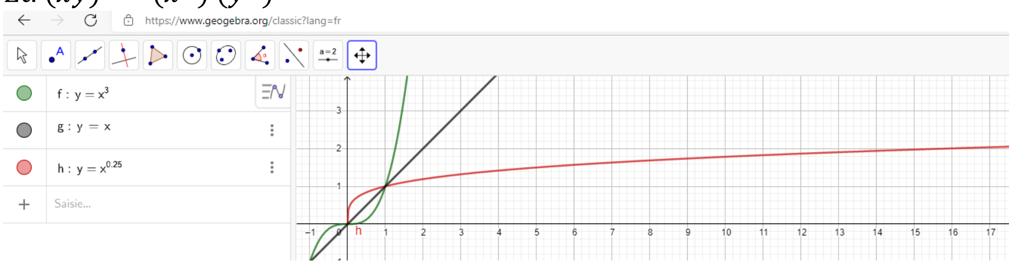
Pour tout x réel, exp(-x) = $\frac{1}{\exp(x)}$ et pour tous les réels x et y : exp(x-y) = $\frac{\exp(x)}{\exp(y)}$
Démonstration : Immédiate en reprenant la propriété précédente !



Soit α un réel, on appelle fonction puissance d'exposant α, la fonction définie sur $\mathbb{R}^{*+}$ par : $x^\alpha = \exp(\alpha \ln(x))$

La fonction puissance est dérivable sur $\mathbb{R}^{*+}$ et de dérivée : $\alpha x^{\alpha-1}$

Pour (x ;y)$\in (\mathbb{R}^{*+})^2$ et $(\alpha; \beta) \in \mathbb{R}^2$
On a : $\ln(x^\alpha) = \alpha\ln(x)$, $(x^\alpha)^\beta = (x^{\alpha\beta})$, $(x^\alpha)(x^\beta) = (x^{\alpha+\beta})$, $(x^{-\alpha}) = \frac{1}{(x^\alpha)}$, $(\frac{x}{y})^\alpha = \frac{(x^\alpha)}{(y^\alpha)}$
Et: $(xy)^\alpha = (x^\alpha)(y^\alpha)$



3) Quelques limites “classiques”:

On a: $\lim\limits_{x\to 0+} \ln(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to +\infty} \ln(x) = \infty$ et $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$

On a: $\lim\limits_{x\to -\infty} \exp(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to \infty} \exp(x) = \infty$ et $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\exp(x)-1}{x} = 1$

Pour $\alpha>0$, $\lim\limits_{x\to 0+} x^{\alpha} = 0$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} x^{\alpha} = \infty$

4) Croissances comparées

On a $\lim\limits_{x\to 0+} x^{\alpha}|\ln(x)|^{\beta} = 0$

On a: $\lim\limits_{x\to -\infty} |x|^{\alpha}e^{x} = 0$

On a: $\lim\limits_{x\to \infty} \frac{(\ln(x))^{\beta}}{x^{\alpha}} = 0$

On a: $\lim\limits_{x\to \infty} \frac{e^{x}}{x^{\alpha}} = \infty$

5) Fonctions circulaires directes

a) Premières propriétés

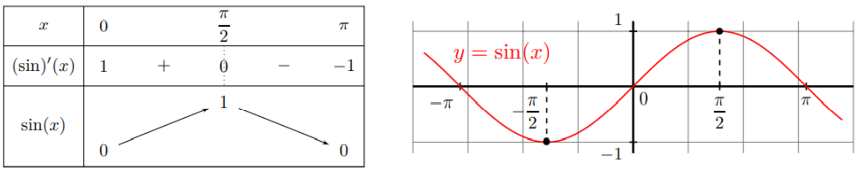
La fonction cosinus, notée cos, est 2π-périodique, dérivable sur $\mathbb{R}$ et cos’(x) = -sin(x)

La fonction sinus, notée sin, est 2π-périodique, dérivable sur $\mathbb{R}$ et sin’(x) = cos(x)

La fonction tangente, notée tan, est π-périodique, dérivable sur $\mathbb{R}\setminus\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ et $\tan'(x) = 1+\tan^2(x) = \frac{1}{cos^2 x}$

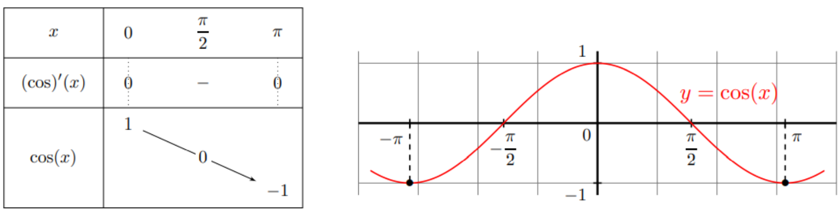
Pour le sinus :

Tableau de variation et courbe représentative



Pour le cosinus :

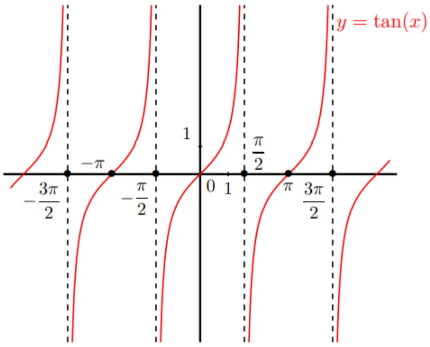
Tableau de variation et courbe représentative



Pour la tangente :

Tableau de variation et courbe représentative

x	0	$\frac{\pi}{2}$
$\tan'(x)$	1 $+$	||
$\tan(x)$	0 $\nearrow$	$+\infty$



b) Limites

On a : $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x} = 1$ $\qquad \lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan(x)}{x} = 1$ $\qquad \lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{x^2}\frac{1}{2}$

c) Formule de duplication de la tangente :

On a $\tan(a+b) = \frac{\tan(a)+\tan(b)}{1-\tan(a)\tan(b)}$

Exercice :

#Pour t$\in \mathbb{R}\backslash\{\pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$, on pose u $= \tan(\frac{t}{2})$

Exprimer cos(t), sin(t) et tan(t) en fonction de u

#Déterminer $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\cos(x)}{x}$

#Soit f(x) $= \frac{\sin(2x)}{1+\cos^2 x}$, on admet ici que f est dérivable sur $\mathbb{R}$, montrer que f '(x) $= \frac{3\cos(2x)+1}{(1+\cos^2(x))^2}$

Comme $\cos(2a) = \cos^2(a)\text{-}\sin^2(a) = \cos^2(a)(1\text{-}\tan^2(a))$ or $1+\tan^2(a) = \frac{1}{\cos^2(a)}$

Soit $\cos(2a) = \frac{1-\tan^2 a}{1+\tan^2 a}$, et $\cos(t) = \frac{1-u^2}{1+u^2}$

On a par la formule de duplication, $\tan(t) = \frac{2u}{1-u^2}$

Et sint $= \cos(t)\tan(t) = \frac{2u}{1+u^2}$

II. Autour de la notion de bijection

Dans cette partie I désigne un intervalle d'intérieur non vide, a est un point de I, et f une fonction définie sur I.

On considère connu la définition de fonctions croissantes, décroissantes pour des fonctions non nécessairement dérivables.

1) Monotonie sur un intervalle

Soit f : I→ $\mathbb{R}$ **dérivable**

La fonction f est croissante si et seulement si f '≥0

La fonction f est décroissante si et seulement si f '≤0

La fonction f est constante si et seulement si sa dérivée est nulle.

Démonstration : Dans un prochain chapitre…

Rappels : Une fonction f est dérivable en a si son taux d'accroissement défini sur $\mathbb{R}\backslash\{a\}$, $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ admet une limite finie en a. Cette limite s'appelle alors le nombre dérivé et est noté f '(a)

Exercice : Démontrer que si deux fonctions définies et dérivables sur I telles que f' = g', alors f et g diffèrent d'une constante.

On a : (f-g)' = f'-g' = 0 donc f-g constante…

2) Stricte monotonie
Soit f une fonction dérivable sur I. Si f ' est positive et ne s'annule qu'en un nombre fini de points alors f est strictement croissante.

Remarque : Même type de proposition pour une fonction strictement décroissante.

Démonstration : Dans un prochain chapitre…

Exercices :

Etudier les variations de f sur]0,+∞[: x→ $\frac{2}{\sqrt{x}}-\frac{1}{x}$

On a f '(x) = $\frac{-1}{x\sqrt{x}}+\frac{1}{x^2}\geq 0$

Démontrer que sur]0 ; $\frac{\pi}{2}$], xcos(x)<sin(x)

Soit g(x) = xcos(x)-sin(x), g'(x) = cos(x)-xsin(x)-cos(x) = -xsin(x)≤0 sur]0 ; $\frac{\pi}{2}$],

Donc g est décroissante et pour tout x de]0 ; $\frac{\pi}{2}$], g(x)≤ $g(0) = 0$,

soit xcos(x)-sin(x)<0

3) Définition
Une application f de E vers F est dite **injective** si : $\forall(x,x')\in E^2, f(x)=f(x')\Rightarrow x=x'$

Une application f de E vers F est dite **surjective** si : $\forall y\in F, \exists x\in E, y=\ f(x)$

Une application f de E vers F est dite **bijective**, ou f est une **bijection**, si et seulement si $\forall y\in F, \exists!\, x\in E\ y=f(x)$
Ainsi, f est bijective si elle est à la fois injective et surjective.

Ex : L'application t→ $t^2 est\ bijective\ de\ \mathbb{R}+\ sur\ \mathbb{R}+$

Soit y$\in \mathbb{R}+$, on cherche x $\in \mathbb{R}+$ tel que, y=x^2…une seule solution x =$\sqrt{y}$

Remarque : Une application bijective de E dans E est appelée permutation de E, l'ensemble des permutations de E se note S(E)

4) Définition
Soit f une application bijective de E dans F, l'application de F dans E, qui à tout y de F associe l'unique x de E vérifiant y = f(x), s'appelle **l'application réciproque de f, et se note f^{-1}**

Ex : L'application $[\frac{-\pi}{2};\frac{\pi}{2}] \rightarrow [-1;1]$, t→sin(t) est bijective et son application réciproque est Arcsin

Exercice : Soit l'application f : [-2 ;∞[→ ℝ+, x→ $\sqrt{x+2}$

Montrer que f est bijective, et donner l'expression de son application réciproque.

On a f dérivable sur]-2 ;∞[(voir cours de Terminale sur $\sqrt{u}$), et f '(x) = $\frac{1}{2\sqrt{x+2}}$

Donc f est croissante strictement.

On a $\lim_{x\to -2} \sqrt{x+2} = 0$ et $\lim_{x\to +\infty} \sqrt{x+2} = +\infty$

Donc f réalise une bijection strictement croissante de [-2 ;∞[sur]0 ;∞[

Soit y∈]0 ;∞[, on cherche x de [-2 ;∞[, tel que y=$\sqrt{x+2}$

On a : y^2=x+2, d'où x=y^2-2

La fonction réciproque est $f^{-1}(x) = x^2-2$

5) Proposition
a) Si f est bijective de E dans F alors $f^{-1}of = Id_E$ et $fof^{-1} = Id_F$

Démonstration : pour tout x de E, on a $f^{-1}of(x) = f^{-1}(f(x)) = x$ puisque f(x) possède un unique antécédent…

Au fait…A-t-on $f^{-1}of = fof^{-1}$?
Et la réponse à la question : $f^{-1}of = fof^{-1}$? Non Id_E VS Id_F

b) Soit f une application de E dans F, g une application de F dans E, si fog = Id_F et si gof = Id_E, alors f et g sont bijectives et réciproques l'une de l'autre

Remarque : Il est indispensable de vérifier fog = Id_F ET si gof = Id_E

Démonstration : Par symétrie, on va juste démontrer que f est bijective et que f^{-1}=g

Soit y ∈F, $\exists!\, x \in E$, y=f(x) ?

Analyse : Soit x de E tel que y=f(x), alors g(y)=gof(x), g(y)=x

Synthèse : Soit y ∈F, g(y) $\in E$, *et* f(g(y))=fog(y)=y

On a bien l'unicité car si x' était un autre antécédent, alors g(y)=x' d'où x=x'

c) Soit f de E dans F bijective, alors f^{-1} est bijective et $(f^{-1})^{-1} = f$
d) Si f de E dans F et g de F dans E sont bijectives, alors gof est bijective et $(gof)^{-1} = f^{-1}o\, g^{-1}$

<u>Exercice</u> : Démontrer les deux propositions précédentes.

Remarque importante : Si f est une application de E dans F et B une partie de F, la notation $f^{-1}(B)$ désignant l'image réciproque de B par f ne présage en rien du caractère bijectif de f !

6) Etude des fonctions réciproques :
a) Proposition : Soit Y une partie de ℝ et f :X→Y une bijection
Alors les graphes de f et de f^{-1} sont symétriques par rapport à la première bissectrice.

Démonstration : Par définition !
M(x,y) est sur la courbe représentative de f si et seulement si y=f(x)
Or y=f(x)⇔x=$f^{-1}(y)$ ssi M'(y,$f^{-1}(y)$) est sur la courbe de f^{-1}

b) Monotonie
Si f :X→Y est une bijection strictement monotone alors f^{-1} est strictement monotone et de même monotonie que f

Démonstration : Soit y_1 et y_2 deux éléments de Y, tels que $y_1<y_2$, $\exists!\,(x_1,x_2) \in X^2$, $y_1=f(x_1)$ et $y_2=f(x_2)$, si f est croissante, $x_1<x_2$, or $f^{-1}(y_1)=x_1$ et $f^{-1}(y_2)=x_2$
Donc f^{-1} est croissante.

c) Dérivabilité
Soit J un intervalle, et f :I→J une bijection dérivable, b∈J et a = $f^{-1}(b)$, alors :
\# f^{-1} est dérivable en b ssi f'(a)≠0

\# Si f '(a)≠0, alors $(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)}$ (**de façon équivalente : $(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$**)
Si f '(a)= 0 alors la tangente à la courbe représentative de f est horizontale et celle correspondant à la réciproque (par symétrie) sera verticale

Sinon : $\frac{f^{-1}(y)-f^{-1}(b)}{y-b} = \frac{f^{-1}(f(x))-f^{-1}(f(a))}{f(x)-b} = \frac{x-a}{f(x)-f(a)}$ puis on passe à la limite…

7) Fonction bornée, majorée, minorée
Soit f une fonction de ℝ sur ℝ, et A⊂D_f (domaine de définition de f)
-on dit que f est **majorée** sur A par M, si $\exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in A$, f(x)≤M
M est appelé majorant de f sur A

- on dit que f est **minorée** sur A par m, si $\exists m \in \mathbb{R}, \forall x \in A, m$ ≤f(x)
m est appelé minorant de f sur A

-on dit que f est **bornée** sur A par M, si f est majorée et minorée
Remarque : f est bornée si et seulement si $\exists M \in \mathbb{R}^+, \forall x \in A$, |f(x)| ≤M

8) Maximum, minimum, extremum d'une fonction
Soit f une fonction de ℝ sur ℝ, et A⊂D_f (domaine de définition de f)
-on dit que f admet un **maximum** sur A en α si $\forall x \in A$, f(x)≤f(α)

-on dit que f admet un **minimum** sur A en α si $\forall x \in A$, f(x)≥f(α)

-on dit que f admet un **extremum** sur A en α si f admet en α soit un maximum soit un minimum

Remarque : C'est f(α) le maximum, pas α !

Exercice :
Soit f :]0 ;+∞[→ ℝ, définie par f(x) $= \frac{1}{x}$, f est-elle majorée ? minorée ? Possède-t-elle un maximum ?

9) Composée
Soit f : A → B et g : C → D deux fonctions de R dans R telles que B ⊂ C.
La fonction g ∘ f : A → D définie par (g ∘ f)(x) = g (f(x)) pour x ∈ A est **appelée la composée de f par g.**

Soit la fonction f définie sur ℝ par f(x) = x^2 et g(x) la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par g(x) = $\sqrt{x}$.
Alors : gof est bien définie sur ℝ, car les valeurs prises par f sont bien dans le domaine de définition de g, et gof(x) = x.
De même fog est bien définie sur $\mathbb{R}^+$, et fog(x) = |x|

10) Parité
Une partie A non vide de ℝ est dite **centrée en 0**, si pour tout x de A, -x∈A

Une fonction de la variable réelle est dite **paire** si D_f est centré en 0 et si $\forall x \in D_f, f(x) = f(-x)$
Une fonction de la variable réelle est dite **impaire** si D_f est centré en 0 et si $\forall x \in D_f, f(-x) = -f(x)$

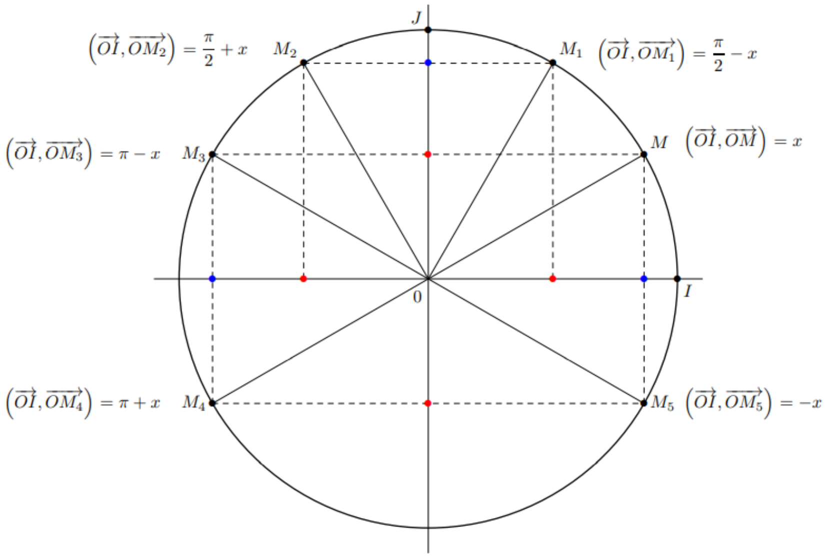
11) Périodicité
Soit f une fonction de ℝ sur ℝ, f est dite **périodique**, de période T, si : $\exists T \in \mathbb{R}^{*+}, \forall x \in \mathbb{R}$, f(x+T) = f(x)

Remarque : La courbe représentative d'une fonction périodique dont T est une période, est invariante par les translations de vecteurs $kT\vec{\imath}$ avec $k \in \mathbb{Z}$

Exercice :
#Soient f et g deux fonctions impaires sur un ensemble X, étudier la parité de la fonction x→f(x)g(x)
#Montrer que la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = \frac{\sin(2x)}{1+cos^2(x)}$ est π-périodique.

III. Une illustration : l'étude des fonctions trigonométriques réciproques.

Préambule :



Formulaire à connaître par cœur !!!

- $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin(x)$; $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos(x)$
- $\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin(x)$; $\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos(x)$
- $\cos(\pi - x) = -\cos(x)$; $\sin(\pi - x) = \sin(x)$
- $\cos(\pi + x) = -\cos(x)$; $\sin(\pi + x) = -\sin(x)$
- $\cos(-x) = \cos(x)$; $\sin(-x) = -\sin(x)$

- $\cos^2(a) + \sin^2(a) = 1$
- $\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$
- $\cos(2a) = \cos^2(a) - \sin^2(a) = 2\cos^2(a) - 1 = 1 - 2\sin^2(a)$
- $\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a)$
- $\sin(2a) = 2\sin(a)\cos(a)$
- $\cos(a)\cos(b) = \frac{1}{2}(\cos(a+b) + \cos(a-b))$
- $\sin(a)\sin(b) = \frac{1}{2}(\cos(a-b) - \cos(a+b))$
- $\sin(a)\cos(b) = \frac{1}{2}(\sin(a+b) + \sin(a-b))$
- $\cos(a) + \cos(b) = 2\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$
- $\cos(a) - \cos(b) = -2\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)$
- $\sin(a) + \sin(b) = 2\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$
- $\sin(a) - \sin(b) = 2\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)$

1) Fonctions circulaires réciproques

a) Arc sinus

La restriction de la fonction sinus à $[-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}]$ est une bijection de $[-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}]$ sur [-1 ;1], on appelle Arc sinus et on **note Arcsin : [-1 ;1]→ $[-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}]$ sa bijection réciproque.**

Ainsi : y = Arcsin(x) et x ∈[-1 ;1] ⇔ x=sin(y) et y∈$[-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}]$

b) Arc cosinus

La restriction de la fonction cosinus à $[0 ;\pi]$ est une bijection de $[0 ;\pi]$ sur [-1 ;1], on appelle Arc cosinus et on note **Arcos : [-1 ;1]→ $[0 ;\pi]$ sa bijection réciproque.**

Ainsi : y = Arcos(x) et x ∈[-1 ;1] ⇔ x=cos(y) et y∈$[0 ;\pi]$

c) Arc tangente

La fonction tangente est une bijection de $]\frac{-\pi}{2} ;\frac{\pi}{2}[$ sur $\mathbb{R}$, on appelle Arc tangente et on note **Arctan : $\mathbb{R} \rightarrow]\frac{-\pi}{2} ;\frac{\pi}{2}[$ sa bijection réciproque.**

Ainsi : y = Arctan(x) et x ∈ $\mathbb{R}$ ⇔ x=tan(y) et y∈$]\frac{-\pi}{2} ;\frac{\pi}{2}[$

d) Propriétés

Les fonctions Arcsin et Arctan sont impaires.

Pour tout réel x de [-1 ;1], on a cos(Arcsin(x)) $= \sqrt{1-x^2}$
et sin(Arcos(x)) $= \sqrt{1-x^2}$

Pour tout x de [-1 ;1], Arcos(x) + Arcsin(x) $= \frac{\pi}{2}$

Pour tout x>0, Arctan(x) + Arctan($\frac{1}{x}$) $= \frac{\pi}{2}$

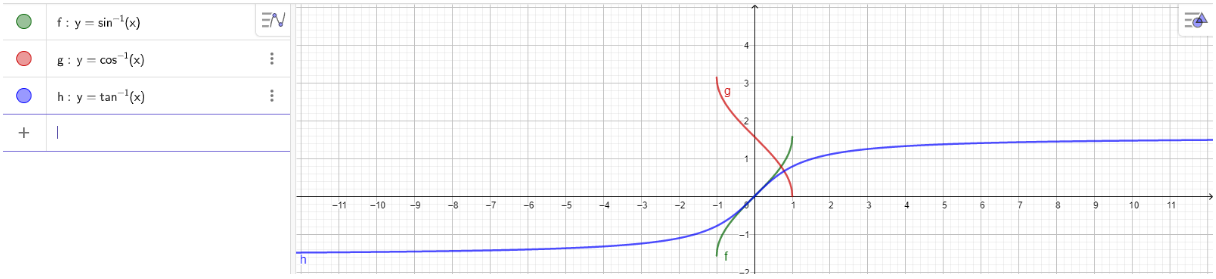
Pour tout x<0, Arctan(x) + Arctan($\frac{1}{x}$) =-$\frac{\pi}{2}$

e) Continuité et dérivabilité des fonctions circulaires réciproques

La fonction Arcsin est continue sur [-1 ;1], dérivable sur]-1 ;1[et Arcsin’(x) = $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

La fonction Arcos est continue sur [-1 ;1], dérivable sur]-1 ;1[et Arcos’(x) = $\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$

La fonction Arctan est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ et Arctan’(x) $= \frac{1}{1+x^2}$



2) Fonctions hyperboliques

a) Définition

On définit sur $\mathbb{R}$, les fonctions cosinus, sinus et tangente hyperboliques par :

Pour tout x réel : ch(x) $= \frac{e^x+e^{-x}}{2}$, sh(x) $= \frac{e^x-e^{-x}}{2}$, th(x) $= \frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$,

b) Relation fondamentale

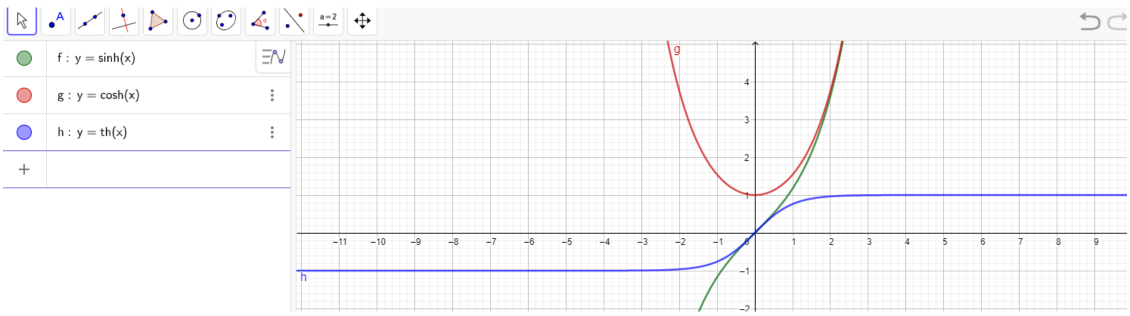
On a pour tout x réel : ch^2(x) – sh^2(x) = 1

c) Propriétés

La fonction ch est paire, dérivable sur $\mathbb{R}$ et ch’(x) = sh(x)

La fonction sh est impaire, dérivable sur $\mathbb{R}$ et sh’(x) = ch(x)

La fonction th est impaire, dérivable sur $\mathbb{R}$ et th’(x) = 1-th^2(x) $= \frac{1}{(ch^2x)}$



IV. Autres fonctions « classiques »

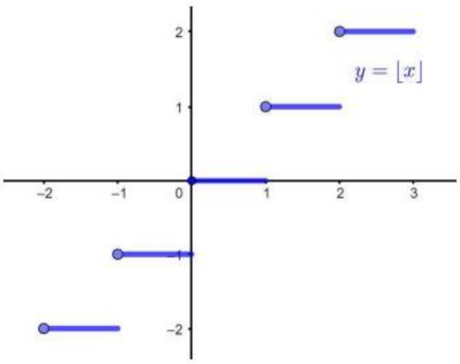
1) Partie entière

a) Définition

Etant donné x un nombre réel, il existe un unique entier relatif n tel que :
$n \leq x < n+1$
Ce nombre est appelé partie entière et se note E(x).

Remarque : On n'a pas en général : E(x+y) = E(x)+E(y)
En effet : E(1,5+1,7)≠E(1,5)+E(1,7)

b) Courbe



c) Proposition

Pour tout n∈ ℤ, on a : $\lim_{x \to n, x<n} E(x) =$ n-1 et $\lim_{x \to n, x>n} E(x) =$ n

Pour tout n∈ ℤ, la fonction partie entière est discontinue.

Exercice
#Soit x un réel, déterminer E(-x) en fonction de E(x)
#$\forall x \in \mathbb{R}, \forall k \in \mathbb{Z}$, montrer que E(x+k) = E(x)+k
#$\forall x \in \mathbb{R}$, montrer que x-1<E(x)≤x

2) Valeur absolue

La valeur absolue est la fonction définie sur ℝ par : $\begin{cases} x \ si \ x \geq 0 \\ -x \ sinon \end{cases}$

Représentation graphique :