

DS 7

Calculatrices et tout objets connectés interdits. Merci d'encadrer les résultats.

Exercice n°1 (sur 7 points)

On note $E = C^0([0,1], \mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel des fonctions continues sur $[0,1]$

On considère les fonctions : $f_0: x \rightarrow 1$, $f_1: x \rightarrow x$ et $f_2: x \rightarrow x^2$

Soit : $G = \{g \in E, \int_0^1 g(x)dx = 0 \text{ et } \int_0^1 xg(x)dx = 0\}$ et $H = \text{vect}\{f_0; f_1\}$

- 1) Justifier que l'application $\varphi: E \rightarrow \mathbb{R}, f \mapsto \int_0^1 f(x)dx$ est une forme linéaire.
- 2) Montrer que G et H sont des sous-espaces vectoriels de E
- 3) Soit $f \in E$ fixé, déterminer des réels a et b tels que la fonction $g: x \mapsto f(x) - ax - b$ appartienne à G
- 4) Montrer que $E = G \oplus H$
- 5) Justifier qu'il existe des réels a_0 et b_0 et une fonction g de G tels que $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 = g(x) + a_0x + b_0$, on note à présent h la fonction $h(x) = a_0x + b_0$
- 6) Montrer que : $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, \int_0^1 (x^2 - ax - b)^2 dx = \int_0^1 (h(x) - ax - b)^2 dx + \int_0^1 g(x)^2 dx$
- 7) En déduire que $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, \int_0^1 (x^2 - ax - b)^2 dx \geq \int_0^1 g(x)^2 dx$

Exercice n°2 (sur 7 points)

On considère le polynôme $P = X^5 - 1$ de $\mathbb{R}[X]$, on pose $\alpha = \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ et $\beta = \cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)$

- 1) Justifier par deux méthodes différentes que le polynôme $X-1$ divise P
- 2) Déterminer le quotient Q de la division euclidienne de P par $X-1$
- 3) Décomposer P en produit de facteurs irréductibles sur $\mathbb{C}[X]$
- 4) Décomposer P en produit de facteurs irréductibles sur $\mathbb{R}[X]$
- 5) En déduire la factorisation de Q sur $\mathbb{R}[X]$
- 6) En déduire la valeur de $\alpha + \beta$ et de $\alpha\beta$
- 7) En déduire la valeur de $\alpha = \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ et $\beta = \cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)$

Exercice n°3 (sur 6 points)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on note (E) : $(X-1)P' = nP$, l'équation d'inconnue $P \in \mathbb{R}[X]$

On remarque facilement que le polynôme nul est solution, le but de l'exercice est de déterminer les solutions non nulles de (E).

- 1) **Analyse** : Soit P une solution de (E) non nulle.
 - a) Déterminer $\deg(P)$
 - b) Démontrer que 1 est racine de P
 - c) Démontrer que : $\forall k \in \mathbb{N}, (X-1)P^{(k+1)} = (n-k)P^{(k)}$ avec $P^{(k)}$ désignant la dérivée k -ème de P
 - d) Déterminer la multiplicité de 1 en tant que racine de P
 - e) Quelle est la forme de P ? Justifier
- 2) **Synthèse** :
Déterminer l'ensemble des solutions de (E)