Exo n°1

E est donc un evn de dimension finie

1) $\dfrac{\|u(x)\|}{\|x\|} = \left\|u\left(\dfrac{x}{\|x\|}\right)\right\|$

$\forall x \in E^*$, $\dfrac{x}{\|x\|} \in S_1(0)$ or $S_1(0)$ est un compact car fermé, borné en dimension finie

De plus u est linéaire donc continue en dim. finie
Th. de Heine, une fonction continue sur un compact est bornée et atteint ses bornes

Donc $\boxed{\sup_{x \in E^*} \dfrac{\|u(x)\|}{\|x\|} \text{ existe}}$

2) $\{x \in E / \|x\| = 1\}$ est fermé et borné donc compact en dim. finie.
De la même façon qu'en 1), $\boxed{\sup_{x \in E,\ \|x\|=1} \|u(x)\| \text{ existe}}$

3) On veut mq $\sup_{x \in E^*} \dfrac{\|u(x)\|}{\|x\|} = \sup_{x \in E,\ \|x\|=1} \|u(x)\|$

. $\left\|\dfrac{x}{\|x\|}\right\| = 1$ donc $\boxed{\sup \left\|u\left(\dfrac{x}{\|x\|}\right)\right\| \leq \sup_{\|x\|=1} \|u(x)\|}$

. $\sup_{x \in E,\ \|x\|=1} \|u(x)\| = \sup_{x \in E,\ \|x\|=1} \dfrac{\|u(x)\|}{\|x\|}$ or $\{x \in E / \|x\| = 1\} \subset E^*$

Donc $\boxed{\sup_{x \in E,\ \|x\|=1} \dfrac{\|u(x)\|}{\|x\|} \leq \sup_{x \in E^*} \|u(x)\|}$

ccl : $\boxed{\sup_{x \in E^*} \dfrac{\|u(x)\|}{\|x\|} = \sup_{x \in E,\ \|x\|=1} \|u(x)\|}$

4) $N(u) = \sup_{x \in E^*} \dfrac{\|u(x)\|}{\|x\|}$, montrons que N est une norme sur $\mathcal{L}(E)$

. N est à valeurs dans $\mathbb{R}^+$

. $N(u) = 0 \iff \sup_{x \in E^*} \dfrac{\|u(x)\|}{\|x\|} = 0$ donc $\forall x \in E^*$, $\|u(x)\| = 0$
donc $\forall x \in E^*$, $u(x) = 0$
de plus $u(0) = 0$
ccl, $\boxed{u = 0}$

. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, $\dfrac{\|\lambda u(x)\|}{\|x\|} = |\lambda| \dfrac{\|u(x)\|}{\|x\|}$
En passant au sup : $\boxed{N(\lambda u) = |\lambda| N(u)}$

. Soit $(u,v) \in \mathcal{L}(E)^2$, $\|(u+v)(x)\| = \|u(x) + v(x)\| \leq \|u(x)\| + \|v(x)\|$

$\dfrac{\|(u+v)(x)\|}{\|x\|} \leq \dfrac{\|u(x)\|}{\|x\|} + \dfrac{\|v(x)\|}{\|x\|}$ pour $x \in E^*$

On passe au sup à droite, puis à gauche
D'où : $\boxed{N(u+v) \leq N(u) + N(v)}$

ccl $\boxed{N \text{ est une norme sur } \mathcal{L}(E)}$

5) $\|u \circ v(x)\| = \|u(v(x))\|$ et pour $x \in E^*$, $\dfrac{\|u \circ v(x)\|}{\|x\|} = \dfrac{\|u(v(x))\|}{\|x\|}$

or $\dfrac{\|u(v(x))\|}{\|x\|} = \underbrace{\dfrac{\|u(v(x))\|}{\|v(x)\|}}_{} \times \dfrac{\|v(x)\|}{\|x\|}$

$\leq \underbrace{\sup_{x \in E^*} \dfrac{\|u(x)\|}{\|x\|}}_{} \times \sup_{E^*} \dfrac{\|v(x)\|}{\|x\|}$

$\leq N(u) N(v)$

on passe au sup à gauche, $\boxed{N(uv) \leq N(u)N(v)}$

Exo n°2. (/8)

$E = C^0([0,1], \mathbb{R})$ et $E_1 = C^1([0,1], \mathbb{R})$

$\|f\|_\infty = \sup_{t \in [0,1]} |f(t)|$ et $\|f\| = |f(0)| + \|f'\|_\infty$

1) Mq $f \mapsto \|f\|$ est une norme sur E_1
2) $\forall f \in E_1$, $\|f\|_\infty \leq \|f\|$
3) $\|.\|$ et $\|\ \|_\infty$ sont elles équ. sur E_1 ?
4) $f_n = \dfrac{\sin(n\pi t)}{\sqrt{n}}$ mq $f_n \xrightarrow[cv]{} \tilde{0}$ sur $[0,1]$

1) . $\|f\|$ est à valeurs dans $\mathbb{R}^+$

. $\|f\| = 0 \iff |f(0)| + \|f'\|_\infty = 0$
Donc $f' = 0$ soit $f = $ cste et $f(0) = 0$ donc $\boxed{f = 0}$

. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, $\|\lambda f\| = |\lambda f(0)| + \|(\lambda f)'\|_\infty = |\lambda| |f(0)| + |\lambda| \|f'\|_\infty = \underline{|\lambda| \|f\|}$

. Soient $(f,g) \in E_1^2$, $|f'(t) + g'(t)| \leq |f'(t)| + |g'(t)|$
on passe au sup à droite puis à gauche et $\|f' + g'\|_\infty \leq \|f'\|_\infty + \|g'\|_\infty$
et $|(f+g)(0)| = |f(0) + g(0)| \leq |f(0)| + |g(0)|$

D'où $\boxed{\|f+g\| \leq \|f\| + \|g\|}$

ccl : $\boxed{\|f\| \text{ est une norme sur } E_1}$

2) $|f(t) - f(0)| \leq \sup_{[0,t]} |f'(t)|\ |t - 0|$

Donc $\sup_{t \in [0,1]} |f(t)| \leq \sup_{t \in [0,1]} |f'(t)| \times 1.$

$\|f\|_\infty \leq \|f'\|_\infty$ donc $\|f\|_\infty \leq \|f'\|_\infty + |f(0)|$

et $\boxed{\|f\|_\infty \leq \|f\|}$

3) Soit $f_n(t) = t^n$, $\|f_n\|_\infty = 1.$

$f_n'(t) = nt^{n-1}$ donc $\|f_n\| = n$

$\lim_{n \to +\infty} \|f_n\| = +\infty$ et $\lim_{n \to +\infty} \|f_n\|_\infty = 1$ donc $\boxed{\text{les normes ne sont pas équivalentes}}$

4). $f_n(t) = \dfrac{\sin(n\pi t)}{\sqrt{n}}$

$|f_n(t)| \leq \dfrac{1}{\sqrt{n}} \to 0$ donc $\|f_n - \tilde{0}\|_\infty \xrightarrow[+\infty]{} 0$ et $\boxed{f_n \xrightarrow[cv]{} \tilde{0} \text{ avec } \|.\|_\infty}$

. $f_n'(t) = \dfrac{n\pi \cos(n\pi t)}{\sqrt{n}}$ et $f_n(0) = 0$

$\|f_n'\|_\infty = \dfrac{n\pi}{\sqrt{n}} = \sqrt{n}\pi$

$\|f_n - 0\| = \sqrt{n}\pi \underset{n \to +\infty}{\not\to} 0$ donc $\boxed{f_n \underset{cv}{\not\to} \tilde{0} \text{ avec } \|.\|}$