

Ondes électromagnétiques dans le vide

On appelle **onde** la propagation de proche en proche d'une perturbation, associée à un transport d'énergie sans transport de matière à grande distance.

Une onde est dite **mécanique** si elle a besoin d'un milieu matériel pour se propager.

Exemples : les ondes sonores ou les vagues sont des ondes mécaniques, au contraire des OEM.

Pour qu'il y ait propagation, il faut qu'il y ait couplage entre deux champs :

- $\vec{E}$ et $\vec{B}$ pour une onde électromagnétique ;
- hauteur d'eau et vitesse d'une particule fluide pour une vague...

Pour traduire la propagation, les deux grandeurs couplées doivent dépendre à la fois de l'espace et du temps.

Source des ondes électromagnétiques :

- Les charges fixes créent un champ électrostatique.
- Les charges en mouvement uniforme (courant électrique) créent un champ magnétostatique

Les charges accélérées sont donc la source des OEM.

1. Équation de propagation

L'équation de propagation d'une onde est une équation aux dérivées partielles qui implique les dérivées spatiales et temporelles de la grandeur qui se propage.

Elle s'obtient à partir des équations fondamentales : les équations de Maxwell pour une OEM, le PFD pour une onde mécanique.

Rappel : équations de Maxwell dans le vide.

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{E} &= 0 & \overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \operatorname{div} \vec{B} &= 0 & \overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{B} &= \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{aligned}$$

1.1. Analyse vectorielle

Formule du double rotationnel :

$$\overrightarrow{\operatorname{rot}} (\overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{A}) = \overrightarrow{\operatorname{grad}} (\operatorname{div} \vec{A}) - \Delta \vec{A}$$

où intervient l'opérateur **laplacien vectoriel**, qui à un champ vectoriel $\vec{A}$ associe le champ vectoriel $\Delta \vec{A}$, donné en coordonnées cartésiennes par :

$$\Delta \vec{A} = (\Delta A_x) \vec{e}_x + (\Delta A_y) \vec{e}_y + (\Delta A_z) \vec{e}_z$$

où Δ est l'opérateur laplacien scalaire.

L'opérateur laplacien vectoriel s'applique à un champ vectoriel et renvoie un champ vectoriel.

1.2. Équation de propagation pour le champ électrique

Méthode :

Exprimer les deux termes de la formule du double rotationnel avec les équations de Maxwell et les identifier.

D'une part,

$$\overrightarrow{\text{rot}} (\overrightarrow{\text{rot}} \vec{E}) = -\overrightarrow{\text{rot}} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t} (\overrightarrow{\text{rot}} \vec{B}) = -\varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

les dérivées spatiales et temporelles commutent car les variables sont indépendantes.

D'autre part,

$$\overrightarrow{\text{grad}} (\text{div} \vec{E}) - \vec{\Delta} \vec{E} = \vec{0} - \vec{\Delta} \vec{E}$$

En conclusion,

$$\vec{\Delta} \vec{E} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

1.3. Équation de propagation pour le champ magnétique

Application : Équation de propagation pour le champ magnétique

Établir l'équation de propagation pour le champ magnétique.

D'une part,

$$\overrightarrow{\text{rot}} (\overrightarrow{\text{rot}} \vec{B}) = \overrightarrow{\text{rot}} \left(\varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} (\overrightarrow{\text{rot}} \vec{E}) = -\varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}$$

D'autre part,

$$\overrightarrow{\text{grad}} (\text{div} \vec{B}) - \vec{\Delta} \vec{B} = \vec{0} - \vec{\Delta} \vec{B}$$

En conclusion,

$$\vec{\Delta} \vec{B} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}$$

1.4. Bilan

Interprétation physique du terme $\varepsilon_0 \mu_0$

Équation aux dimensions associée à l'équation de propagation :

$$\frac{[\vec{E}]}{m^2} = [\varepsilon_0 \mu_0] \frac{[\vec{E}]}{s^2}$$

ce qui permet d'identifier une vitesse :

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}$$

Forme canonique de l'équation de propagation

Dans le vide, les champs électrique et magnétique vérifient la même équation de propagation, appelée **équation de d'Alembert** ou parfois **équation d'onde**

$$\Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0} \qquad \Delta \vec{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = \vec{0}$$

où $c = 1/\sqrt{\epsilon_0 \mu_0} = 3.10^8 \text{ m.s}^{-1}$ est la **célérité** ou **vitesse de propagation** de l'OEM.

Généralisation aux milieux matériels

L'équation de d'Alembert peut se généraliser en première approche aux **milieux transparents**, à condition de remplacer la célérité dans le vide c par la célérité c/n dans le milieu, où n est l'**indice optique du milieu**.

2. Ondes planes

2.1. Modèle des ondes planes

Définition par les surfaces d'onde

On appelle **surface d'onde** une surface continue de l'espace sur laquelle le champ électromagnétique est uniforme à tout instant.

Une onde est dite **plane** si ses surfaces d'ondes sont des plans parallèles, appelés plans d'onde, et **sphérique** si ses surfaces d'ondes sont des sphères concentriques.

Une onde sphérique modélise une onde émise depuis une source ponctuelle.

Une onde plane modélise une onde sphérique à grande distance de la source.

Des dispositifs particuliers (lentilles...) placés sur le trajet de l'onde peuvent modifier sa nature.

Définition mathématique

Une onde est dite plane si elle ne dépend que du temps et d'une dimension spatiale cartésienne :

$$\vec{E}(M, t) = \vec{E}(x, t) \qquad \vec{B}(M, t) = \vec{B}(x, t)$$

Pour une onde plane, l'équation de d'Alembert s'écrit :

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}$$

Pour simplifier les écritures, on suppose dans toute la suite de ce paragraphe que le champ électrique garde une direction constante $\vec{e}_p$ tout au long de la propagation (polarisation rectiligne).

2.2. Ondes planes progressives

Définition

Une onde plane est dite **progressive** si elle se propage dans un sens bien déterminé, sans étalement ni déformation.

Une onde plane progressive (OPP) correspond à l'image intuitive qu'on se fait d'une onde, par exemple la houle, un laser...

Expression mathématique

Mathématiquement, une OPP se propageant dans le sens des x croissants s'écrit :

$$\vec{E}(x, t) = f(x - ct) \vec{e}_p$$

alors qu'une OPP se propageant dans le sens des x décroissants s'écrit

$$\vec{E}(x, t) = g(x + ct) \vec{e}_p$$

Remarque :

$\vec{e}_p$ est un vecteur unitaire qui renseigne sur la polarisation de l'onde, c'est-à-dire la direction du champ électrique... à ne pas confondre avec la direction de propagation.

► **Pour approfondir** : Montrons que les ondes planes sont bien des solutions de l'équation de d'Alembert. À titre d'exemple, considérons une onde de la forme $\vec{E}(x, t) = f(x - ct) \vec{e}_y$, c'est-à-dire une onde se propageant dans le sens des x croissants et polarisée selon $\vec{e}_y$. Posons $u = x - ct$. Alors,

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} = \frac{dE_y}{du} \times \frac{\partial u}{\partial x} = f'(u) \times 1 \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = \frac{df'}{du} \times \frac{\partial u}{\partial x} = f''(u).$$

Par ailleurs,

$$\frac{\partial E_y}{\partial t} = \frac{dE_y}{du} \times \frac{\partial u}{\partial t} = f'(u) \times (-c) \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} = \frac{d(-cf')}{du} \times \frac{\partial u}{\partial t} = -cf''(u) \times (-c) = c^2 f''(u).$$

On peut alors vérifier que E_y vérifie l'équation de d'Alembert,

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} = f''(u) - \frac{1}{c^2} \times c^2 f''(u) = 0.$$

Expression générale d'une onde plane quelconque

Toute onde plane, solution de l'équation de d'Alembert 1D cartésienne, s'écrit comme la superposition de deux OPP se propageant en des sens opposés,

$$\vec{E}(x, t) = f(x - ct) \vec{e}_p + g(x + ct) \vec{e}_p$$

► **Pour approfondir** : Démontrons ce résultat. Notons $\xi(x, t)$ un champ quelconque d'onde plane, solution de l'équation de d'Alembert, et posons $u = x - ct$ et $v = x + ct$. On a alors

$$\xi(x, t) = \xi(u, v) = \xi(u(x, t), v(x, t)).$$

Réécrivons l'équation de d'Alembert en termes de ces variables u et v , en reliant entre elles les dérivées. D'abord,

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{\partial \xi}{\partial u} \times \underbrace{\frac{\partial u}{\partial x}}_{=1} + \frac{\partial \xi}{\partial v} \times \underbrace{\frac{\partial v}{\partial x}}_{=1} = \frac{\partial \xi}{\partial u} + \frac{\partial \xi}{\partial v}.$$

En appliquant la même démarche pour calculer la dérivée seconde,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} &= \left[\frac{\partial^2 \xi}{\partial u^2} + \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial \xi}{\partial v} \right) \right] \times \frac{\partial u}{\partial x} + \left[\frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\partial \xi}{\partial u} \right) + \frac{\partial^2 \xi}{\partial v^2} \right] \times \frac{\partial v}{\partial x} \\ &= \frac{\partial^2 \xi}{\partial u^2} + 2 \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial \xi}{\partial v} \right) + \frac{\partial^2 \xi}{\partial v^2} \end{aligned}$$

en utilisant le théorème de Schwartz, qui permet de permuter l'ordre de dérivation par rapport à u et v , qui sont deux variables indépendantes. Un calcul analogue (mais un peu plus fastidieux car les dérivées de u et v par rapport au temps ne valent pas 1 mais $\pm c$) pour la dérivée temporelle conduit à

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial u^2} - 2 \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial \xi}{\partial v} \right) + \frac{\partial^2 \xi}{\partial v^2} \right)$$

Ainsi, l'équation de d'Alembert écrite en fonction de u et v se simplifie grandement et devient

$$\frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial \xi}{\partial v} \right) = 0.$$

Intégrons alors successivement par rapport aux deux variables. Une première intégration sur u , à v fixé, donne

$$\frac{\partial \xi}{\partial v} = G(v),$$

où G est une fonction de v seulement, c'est-à-dire « une constante partielle par rapport à u ». L'intégration sur v , à u fixé, donne ensuite

$$\xi(u, v) = f(u) + g(v),$$

où $G(v) = g'(v)$, et où f est une fonction de u seulement. En revenant à la définition de u et v ,

$$\xi(x, t) = f(x - ct) + g(x + ct),$$

ce qui est bien le résultat souhaité, puisque la seule hypothèse faite sur ξ est la nature d'onde plane. ■

2.3. Ondes planes progressives harmoniques

2.3.1. Expression mathématique

Une onde plane progressive est dite harmonique ou sinusoïdale ou monochromatique si sa dépendance en temps est sinusoïdale en tout point,

$$\vec{E}(x, t) = E_0 \cos(\omega t \pm kx + \varphi) \vec{e}_p$$

- Intérêt physique

Une OPPH ne peut pas représenter une « vraie » onde : elle n'a ni début ni fin, et existe depuis la nuit des temps et pour toujours et à jamais. Cependant, grâce à l'analyse de Fourier, toute OPP peut s'exprimer comme une somme d'OPPH.

- Double périodicité

Une OPPH possède une double périodicité :

- périodicité temporelle (sous-entendu en un point fixé $x = x_0$) : $T = 2\pi/\omega$
- périodicité spatiale (sous-entendu à un instant donné $t = t_0$) : $k = 2\pi/\lambda$

Représentation complexe d'une OPPH

Écriture complexe d'une OPPH

$$\vec{E} = E_0 \cos(\omega t \pm kx + \varphi) \vec{e}_p \quad \leftrightarrow \quad \underline{\vec{E}} = E_0 \exp j(\omega t \pm kx + \varphi) \vec{e}_p = \underline{\vec{E}}_0 \exp j(\omega t \pm kx)$$

avec $\underline{\vec{E}}_0 = E_0 \exp j\varphi \vec{e}_p$ l'**amplitude complexe** de l'onde.

Réciproquement, le champ électrique réel est la partie réelle du champ complexe,

$$\vec{E}(M, t) = \text{Re } \underline{\vec{E}}$$

2.3.2. Relation de dispersion

La relation de dispersion est une condition nécessaire pour qu'une OPPH soit solution de l'équation de d'Alembert. Elle s'obtient donc en injectant l'expression de l'OPPH dans l'équation de d'Alembert.

Considérons une OPPH de la forme :

$$\vec{E} = E_0 \cos(\omega t - kx) \vec{e}_y$$

Dérivée spatiale :

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial x} = -kE_0 \sin(\omega t - kx) \vec{e}_y$$

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x^2} = -k^2 E_0 \cos(\omega t - kx) \vec{e}_y$$

Dérivée temporelle :

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = -\omega E_0 \sin(\omega t - kx) \vec{e}_y$$

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = -\omega^2 E_0 \cos(\omega t - kx) \vec{e}_y$$

En insérant dans l'équation de d'Alembert :

$$-k^2 + \frac{1}{c^2} \omega^2 = 0$$

$$\omega = kc$$

Démonstration à partir des champs complexes : considérons la même OPPH ... mais en représentation complexe,

$$\underline{\vec{E}}(x, t) = E_0 e^{i(\omega t - kx)} \vec{e}_y.$$

Dérivée spatiale :

$$\frac{\partial \underline{\vec{E}}}{\partial x} = -ikE_0 e^{i(\omega t - kx)} \vec{e}_y \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 \underline{\vec{E}}}{\partial x^2} = -k^2 E_0 e^{i(\omega t - kx)} \vec{e}_y.$$

Dérivée temporelle :

$$\frac{\partial \underline{\vec{E}}}{\partial t} = +i\omega E_0 e^{i(\omega t - kx)} \vec{e}_y \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 \underline{\vec{E}}}{\partial t^2} = -\omega^2 E_0 e^{i(\omega t - kx)} \vec{e}_y$$

ce qui redonne bien le résultat en injectant dans l'équation de d'Alembert.

Généralisation

Les périodes spatiales et temporelles d'une OPPH sont liées par la relation de dispersion,

$$\omega = kc \quad \text{soit} \quad f = c/\lambda$$

La relation de dispersion est une conséquence de l'équation de propagation.

2.3.3. Vecteur d'onde

On appelle vecteur d'onde d'une OPPH le vecteur de norme $2\pi/\lambda$ de même direction et même sens que la propagation

$$\vec{k} = \frac{2\pi}{\lambda} \vec{u}$$

$\vec{k}$ est homogène à l'inverse d'une longueur et s'exprime en $rad.m^{-1}$.

Par définition, tous les points d'un même plan d'onde sont dans le même état vibratoire, donc le champ électrique ne dépend que de la composante du vecteur $\vec{OM}$ dans la direction de $\vec{k}$, c'est-à-dire de $\vec{k} \cdot \vec{OM}$.

Ceci est cohérent avec le cas simple : $\vec{k} = k \vec{e}_x$ et donc $\vec{k} \cdot \vec{OM} = kx$.

Dans le cas général, le champ électrique d'une OPPH s'écrit :

$$\vec{E} = E_0 \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{OM} + \varphi) \vec{e}_p \quad \leftrightarrow \quad \underline{\vec{E}} = E_0 \exp j(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{OM} + \varphi) \vec{e}_p = \underline{E_0} \exp j(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{OM})$$

où ω et $\|\vec{k}\|$ sont reliés par la relation de dispersion.

Il n'y a cette fois pas de signe $\pm$, par définition de $\vec{k}$ qui est toujours orienté dans le sens de propagation.

2.4. Relation de structure

La relation de structure est une relation intrinsèque entre $\vec{E}$ et $\vec{B}$, qui ne fait pas intervenir leurs dérivées, au contraire des équations de Maxwell. Le plus simple pour l'établir est de raisonner en représentation complexe.

Opérateurs vectoriels appliqués aux champs complexes

Le champ complexe s'écrit :

$$\underline{\vec{E}} = \underline{E_0} \exp j(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{OM}) \vec{e}_p = \underline{E_0} \exp j(\omega t - k_x x - k_y y - k_z z) \vec{e}_p$$

ce qui permet d'identifier les dérivées :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} &= j\omega \underline{\vec{E}} & \frac{\partial \vec{E}}{\partial x} &= -jk_x \underline{\vec{E}} \\ \frac{\partial \vec{E}}{\partial y} &= -jk_y \underline{\vec{E}} & \frac{\partial \vec{E}}{\partial z} &= -jk_z \underline{\vec{E}} \end{aligned}$$

ou de façon plus générale : $\vec{\nabla} \leftrightarrow -j\vec{k}$

Équations de Maxwell complexes

Rappel : équations de Maxwell dans le vide.

$$\operatorname{div} \vec{E} = 0 \qquad \overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0 \qquad \overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{B} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$\operatorname{div} \vec{v} = \vec{\nabla} \cdot \vec{v} = -j\vec{k} \cdot \vec{v} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{v} = \vec{\nabla} \wedge \vec{v} = -j\vec{k} \wedge \vec{v}$$

$$-j\vec{k} \cdot \vec{E} = 0$$

$$-j\vec{k} \wedge \vec{E} = -j\omega \vec{B}$$

$$-j\vec{k} \cdot \vec{B} = 0$$

$$-j\vec{k} \wedge \vec{B} = \varepsilon_0 \mu_0 j\omega \vec{E} = \frac{j\omega}{c^2} \vec{E}$$

En représentation complexe, les équations de Maxwell dans le vide s'écrivent :

$$\vec{k} \cdot \vec{E} = 0$$

$$\vec{k} \wedge \vec{E} = \omega \vec{B}$$

$$\vec{k} \cdot \vec{B} = 0$$

$$\vec{k} \wedge \vec{B} = -\varepsilon_0 \mu_0 \omega \vec{E} = -\frac{\omega}{c^2} \vec{E}$$

Conséquence : relation de structure

La pulsation et le vecteur d'onde étant réelles, la relation issue de MF s'écrit à l'identique pour l'onde réelle :

$$\vec{k} \wedge \vec{E} = \omega \vec{B}$$

$$\vec{k} \wedge \vec{E} = \omega \vec{B}$$

$$\vec{B} = \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega} = \frac{k \vec{u} \wedge \vec{E}}{kc} = \vec{u} \wedge \frac{\vec{E}}{c}$$

Réciproquement l'équation de MA donne :

$$\vec{k} \wedge \vec{B} = -\frac{\omega}{c^2} \vec{E}$$

$$\vec{k} \wedge \vec{B} = -\frac{\omega}{c^2} \vec{E}$$

$$\vec{E} = -\frac{c^2}{\omega} \vec{k} \wedge \vec{B} = -\frac{c^2}{kc} k \vec{u} \wedge \vec{B} = -c \vec{u} \wedge \vec{B}$$

En calculant un double produit vectoriel avec la direction de propagation $\vec{u}$, on montre que cette relation est exactement équivalente à la précédente.

Ces relations étant vraies pour toute OPPH, elles sont également vraies par linéarité pour toute OPP en tant que somme d'OPPH se propageant dans le même sens, donc de même vecteur $\vec{u}$.

Relation de structure d'une OPP :

$$\vec{B} = \vec{u} \wedge \frac{\vec{E}}{c}$$

En particulier, les OPP sont des **ondes transverses** : les champs sont perpendiculaires à la direction de propagation. Ils sont également perpendiculaires entre eux. (vrai pour toute OPP, mais faux pour les sommes d'OPP se propageant en sens différents)

Dans le cas particulier d'une OPPH, cette relation prend la forme :

$$\vec{B} = \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega}$$

Nécessité du couplage :

Cette relation met en évidence le couplage entre les champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$ qui ne peuvent aller l'un sans l'autre : il n'existe pas d'onde « électrique » ni d'onde « magnétique », mais seulement des ondes électromagnétiques.

Conséquence géométrique :

Le trièdre $\vec{u}, \vec{E}, \vec{B}$ est un trièdre direct, i.e. orienté par la règle de la main droite.

Conséquence sur les normes :

$$\|\vec{B}\| = \frac{\|\vec{E}\|}{c}$$

3. Polarisation

On appelle **polarisation** d'une OPP la direction du vecteur champ électrique de l'onde.

La direction de polarisation est décrite par un vecteur unitaire $\vec{e}_p$, qui peut dépendre du temps.

La direction du champ magnétique se détermine avec la relation de structure

Attention de ne pas confondre direction de polarisation et direction de propagation, les deux sont orthogonales.

3.1. Exemples d'états de polarisation d'une onde électromagnétique

Onde non polarisée

Une OEM est dite **non polarisée** si la direction de polarisation fluctue rapidement et aléatoirement. La lumière naturelle est non polarisée.

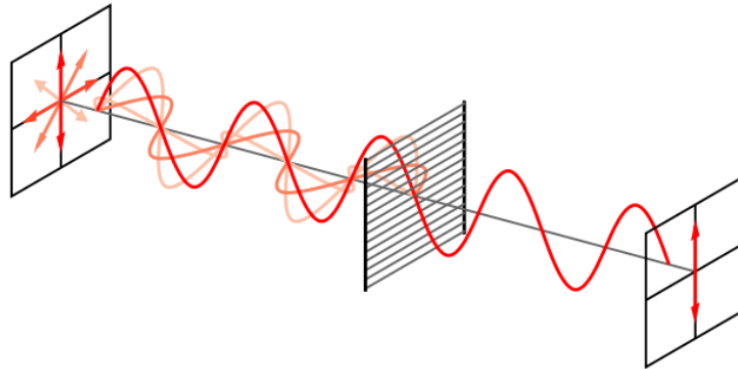
Le caractère vectoriel de l'OEM est masqué par ces fluctuations rapides : c'est le modèle scalaire de la lumière, que nous utiliserons abondamment en optique ondulatoire.

Polarisation rectiligne

Une OEM est dite **polarisée rectilignement** si la direction du vecteur champ électrique est constante.

3.2. Polariseur

Un **polariseur** est un instrument d'optique permettant de construire une onde polarisée rectilignement dans une direction choisie, appelée axe passant du polariseur.



Principe de fonctionnement d'un polariseur

La lumière naturelle est non polarisée, c'est-à-dire que la direction du champ électrique fluctue aléatoirement et rapidement. Lorsqu'elle arrive sur le polariseur, l'onde est absorbée si la direction du champ électrique est parallèle aux barreaux de la grille et transmise si elle est perpendiculaire : en sortie du polariseur, l'onde est dans un état de polarisation rectiligne orthogonale à la grille. Ainsi, un polariseur « extrait » la composante polarisée selon son axe passant $\vec{n}$ et bloque la composante orthogonale.

$$\vec{E}_{\text{sortant}} = (\vec{E}_{\text{entrant}} \cdot \vec{n}) \vec{n}$$

3.3. Mise en pratique

Application : Exemples d'ondes planes polarisées rectilignement

Pour les champs électriques ci-dessous, identifier la direction de propagation et la direction de polarisation de l'onde. Exprimer le champ magnétique associé.

$$\vec{E}_1 = E_0 \cos(\omega t - kx) \vec{e}_y$$

$$\vec{E}_2 = E_0 \exp j(\omega t - kz) \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \vec{e}_x + \frac{1}{\sqrt{2}} \vec{e}_y \right)$$

$$\vec{E}_3 = -E_0 \exp \left(-\frac{(x + ct)^2}{a^2} \right) \vec{e}_x$$

Le champ magnétique se déduit de la relation de structure.

1) Propagation selon $+\vec{e}_x$, polarisation selon $\vec{e}_y$.

$$\vec{B} = \frac{1}{c} \vec{e}_x \wedge \vec{E} = \frac{E_0}{c} \cos(\omega t - kx) \vec{e}_z$$

2) Propagation selon $+\vec{e}_z$, polarisation à 45° des vecteurs $\vec{e}_x$ et $\vec{e}_y$.

$$\vec{B} = \frac{1}{c} \vec{e}_z \wedge \vec{E} = \frac{E_0}{c} \exp j(\omega t - kz) \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \vec{e}_y - \frac{1}{\sqrt{2}} \vec{e}_x \right)$$

3) Propagation selon $-\vec{e}_x$, polarisation selon $\vec{e}_z$.

$$\vec{B} = -\frac{1}{c} \vec{e}_x \wedge \vec{E} = -\frac{E_0}{c} \exp\left(-\frac{(x+ct)^2}{a^2}\right) \vec{e}_y$$

4. Transport d'énergie par une onde électromagnétique

4.1. Densité volumique d'énergie électromagnétique

Considérons par exemple une OPPH dont les champs s'écrivent

$$\vec{E} = E_0 \cos(\omega t - kx) \vec{e}_y$$

$$\vec{B} = \frac{1}{c} \vec{e}_x \wedge \vec{E} = \frac{E_0}{c} \cos(\omega t - kx) \vec{e}_z$$

Densité volumique d'énergie électromagnétique instantanée :

$$u_e = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E_0^2 \cos^2(\omega t - kx)$$

$$u_m = \frac{E_0^2}{2\mu_0 c^2} \cos^2(\omega t - kx) = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E_0^2 \cos^2(\omega t - kx)$$

On en déduit :

$$u_{em} = \varepsilon_0 E_0^2 \cos^2(\omega t - kx)$$

En moyenne temporelle :

$$\langle \cos(\omega t + \varphi) \rangle = \langle \sin(\omega t + \varphi) \rangle = 0 \text{ et } \langle \cos^2(\omega t + \varphi) \rangle = \langle \sin^2(\omega t + \varphi) \rangle = 1/2$$

Densité volumique d'énergie moyenne :

$$\langle u_{em} \rangle = \varepsilon_0 E_0^2 \langle \cos^2(\omega t - kx) \rangle = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E_0^2$$

Généralisation :

La densité volumique d'énergie électromagnétique d'une OPPH est équirépartie entre les formes électrique et magnétique.

La densité volumique d'énergie est strictement positive en tout point, et sa moyenne temporelle est uniforme.

4.2. Puissance rayonnée : vecteur de Poynting

Considérons la même OPPH que précédemment,

$$\vec{E} = E_0 \cos(\omega t - kx) \vec{e}_y$$

$$\vec{B} = \frac{1}{c} \vec{e}_x \wedge \vec{E} = \frac{E_0}{c} \cos(\omega t - kx) \vec{e}_z$$

Vecteur de Poynting instantané :

$$\vec{\Pi} = \frac{E_0^2}{c\mu_0} \cos^2(\omega t - kx) \vec{e}_x$$

En moyenne temporelle :

$$\langle \vec{\Pi} \rangle = \frac{1}{2} \epsilon_0 E_0^2 c \vec{e}_x = \langle u_{em} \rangle c \vec{e}_x$$

Une OPPH transporte de l'énergie dans sa direction de propagation.

4.3. Énergie et représentation complexe

Un exemple pour constater le problème

Considérons le champ $\vec{E} = E_0 \cos(\omega t - kx) \vec{e}_y$, soit en complexe $\underline{E} = E_0 \exp j(\omega t - kx) \vec{e}_y$.

Le passage dans le sens complexe $\rightarrow$ réel se fait avec la partie réelle : $\vec{E} = \text{Re}(\underline{E})$.

$$\vec{E} = E_0 \cos(\omega t - kx) \vec{e}_y$$

$$E^2 = E_0^2 \cos^2(\omega t - kx)$$

$$\underline{E} = E_0 \exp j(\omega t - kx) \vec{e}_y$$

$$\underline{E}^2 = E_0^2 \exp 2j(\omega t - kx)$$

$$\text{Re}(\underline{E}^2) = E_0^2 \cos(2\omega t - 2kx)$$

$$E^2 \neq \text{Re}(\underline{E}^2)$$

La représentation complexe ne peut pas être utilisée pour calculer le carré de grandeurs. Cela ne signifie pas qu'elle n'apporte aucune information, mais celles-ci sont limitées aux valeurs moyennes.

$$\langle E^2 \rangle = \frac{E_0^2}{2}$$

$$\underline{E} \underline{E}^* = |\underline{E}|^2 = E_0^2$$

Attention ! Les grandeurs énergétiques sont non linéaires, et ne peuvent pas être calculées à partir des représentations complexes. Celles-ci ne donnent accès qu'à des valeurs moyennes.

$$u_e = \frac{1}{2} \epsilon_0 \vec{E}^2$$

$\leftrightarrow$

$$\langle u_e \rangle = \frac{1}{2} \epsilon_0 \underline{E} \underline{E}^*$$

$$\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0}$$

$\leftrightarrow$

$$\langle \vec{\Pi} \rangle = \frac{1}{2} \text{Re} \left(\frac{\underline{E} \wedge \underline{B}^*}{\mu_0} \right)$$