

Modèle scalaire des ondes lumineuses

Lors du cours sur les ondes électromagnétiques, nous nous étions la plupart du temps limité au cas très simplifié d'une onde plane progressive parfaitement monochromatique.

Comprendre les phénomènes optiques en termes ondulatoires demandera d'aller plus loin dans cette description :

- Quelle est l'onde émise par une source lumineuse réelle ?
- Qu'est-ce qu'un détecteur (œil, caméra...) perçoit de cette onde ?
- Quel est l'effet « d'obstacles » placés sur son chemin, par exemple une lentille ?

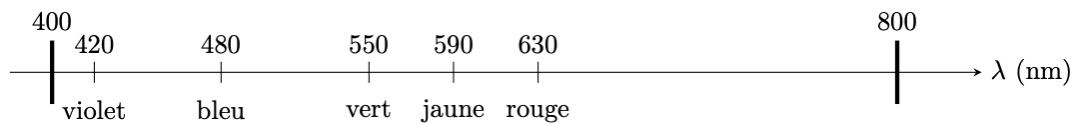
Répondre à ces questions permettra également de relier les théories apparemment disjointes de l'électromagnétisme et de l'optique géométrique.

Comme son nom l'indique, l'optique s'intéresse aux ondes électromagnétiques de longueur d'onde appartenant à un domaine restreint appelé domaine du visible.

La longueur d'onde dans le vide des ondes monochromatiques visibles est comprise entre 400 et 800 nm. La fréquence associée $\nu = c/\lambda$ est comprise entre 4.10^{14} et 7.10^{14} Hz .

Une source de lumière blanche émet un spectre continu contenant toutes les longueurs d'ondes visibles.

À une longueur d'onde monochromatique est associée une couleur pure :



Cette correspondance entre couleur et longueur d'onde concerne les longueurs d'onde dans le vide.

L'œil est le plus sensible aux couleurs jaunes, ce qui correspond plus ou moins au maximum d'émission du spectre solaire. En revanche, il ne perçoit quasiment plus les couleurs au-delà de 750 nm.

1. Modèles pour l'émission et la réception de la lumière

1.1. Modèle scalaire des ondes lumineuses

À l'exception de certains lasers, la lumière émise par toutes les sources rencontrées usuellement n'est pas polarisée, et la grande majorité des détecteurs optiques est insensible à la polarisation : dans tout le cours d'optique, cet aspect ne sera pas considéré.

Le modèle scalaire consiste à décrire l'onde lumineuse par un champ scalaire $s(M, t)$ appelé **onde scalaire**, **vibration scalaire** ou encore **vibration lumineuse**.

Qualitativement, la vibration scalaire est proportionnelle aux composantes du champ électrique de l'onde électromagnétique, mais décrire précisément ce facteur de proportionnalité ne sera pas nécessaire.

1.2. Émission lumineuse : modèle des trains d'ondes

En pratique, le spectre d'une onde lumineuse ne peut jamais être parfaitement pur, pas même celui d'un laser ou si l'on isole une raie à l'aide d'un filtre coloré. Ainsi, une onde lumineuse n'est jamais parfaitement sinusoïdale, c'est-à-dire que les paramètres de la sinusoïde (amplitude, fréquence, phase initiale) varient lentement au cours du temps. Logiquement, le temps caractéristique de ces variations lentes doit se retrouver sur le spectre.

Un exemple pour comprendre

Considérons un signal sinusoïdal amorti, par exemple une tension :

$$u(t) = U_0 \exp -t/\tau \cos(2\pi f_0 t)$$

Il ne s'agit pas d'un signal purement sinusoïdal, donc son spectre ne contient pas qu'une seule fréquence : il a une largeur intrinsèque non nulle Δf , centrée autour de la fréquence « principale » du signal f_0 . L'amplitude de la sinusoïde varie sur un temps caractéristique τ , et la largeur spectrale Δf est d'autant plus grande que τ est petit : en effet, le signal est alors « moins sinusoïdal », il est donc raisonnable que la largeur spectrale augmente.

Généralisation : l'analyse de Fourier permet de relier la largeur spectrale d'un signal (qualitativement l'écart entre les fréquences maximale et minimale de son spectre) et l'échelle de temps sur laquelle il varie : en ordre de grandeur, la largeur en fréquence Δf du spectre d'un signal est reliée à la durée caractéristique Δt des variations lentes par :

$$\Delta f \times \Delta t \sim 1$$

Temps et longueur de cohérence

On appelle temps de cohérence τ_c d'une source lumineuse le temps caractéristique de variation des propriétés de l'onde lumineuse.

Le temps de cohérence est relié à la largeur spectrale $\Delta \nu$ de la source par : $\tau_c \times \Delta \nu = 1$

On appelle longueur de cohérence (temporelle) la longueur définie par : $L_c = c \times \tau_c$

Ordres de grandeur :

Source	Laser	Raie spectrale	Lumière blanche
τ_c	10^{-8} à 10^{-9} s	10^{-10} à 10^{-11} s	10^{-15} s
L_c	1 m	1 cm	0,1 μ m

Largeur en fréquence, largeur en longueur d'onde

En optique, l'usage est de décrire les spectres en longueur d'onde plutôt qu'en fréquence : il faut donc relier la largeur en longueur d'onde $\Delta \lambda$ à la largeur en fréquence $\Delta \nu$.

Considérons une raie de largeur en fréquence $\Delta \nu$ centrée sur la fréquence ν_0 . Compte tenu des ordres de grandeur classiques en optique, $\Delta \nu \ll \nu_0$.

Rappel : $f(x + dx) = f(x) + f'(x)dx$

La largeur en longueur d'onde s'obtient par un développement limité de la relation de dispersion autour de $\nu = \nu_0$:

$$\lambda\left(\nu_0 \pm \frac{\Delta\nu}{2}\right) = \lambda(\nu_0) \pm \frac{d\lambda}{d\nu}(\nu = \nu_0) \times \frac{\Delta\nu}{2}$$

donc :

$$\Delta\lambda = \lambda\left(\nu_0 - \frac{\Delta\nu}{2}\right) - \lambda\left(\nu_0 + \frac{\Delta\nu}{2}\right) = -\frac{d\lambda}{d\nu}(\nu = \nu_0) \Delta\nu$$

or d'après la relation de dispersion :

$$\lambda = \frac{c}{\nu}$$

d'où :

$$\frac{d\lambda}{d\nu}(\nu = \nu_0) = -\frac{c}{\nu_0^2}$$

On en déduit la largeur en longueur d'onde :

$$\Delta\lambda = \frac{\lambda_0^2}{c} \Delta\nu = \frac{\lambda_0^2}{c\tau_c}$$

La largeur en longueur d'onde d'une raie spectrale est reliée à sa largeur en fréquence et donc au temps de cohérence par le terme d'ordre 1 du développement limité de la relation de dispersion,

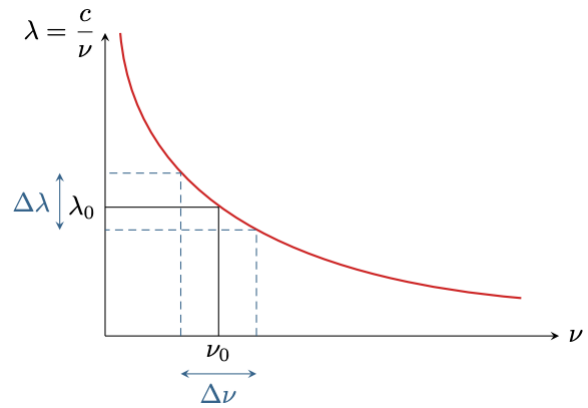
$$\Delta\lambda = \frac{\lambda_0^2}{c} \Delta\nu = \frac{\lambda_0^2}{c\tau_c}$$

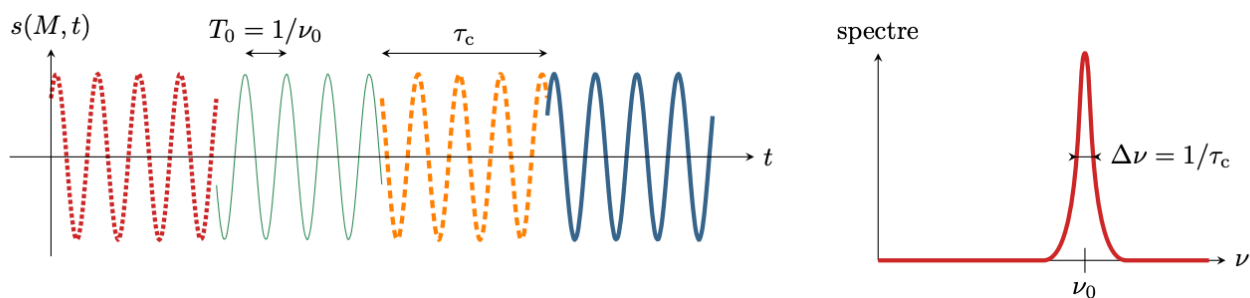
Modèle des trains d'onde

A priori, l'onde lumineuse est une onde presque harmonique, dont l'amplitude, la fréquence et la phase initiale peuvent varier de manière simultanée : de telles variations combinées ne peuvent pas être décrites mathématiquement de façon simple. Le modèle des trains d'onde est une simplification permettant de décrire efficacement une onde lumineuse. Il nous sera très utile pour des interprétations.

Une onde lumineuse est modélisée par une succession de **trains d'onde**, tous de même durée τ_c , pendant lesquels l'onde est parfaitement sinusoïdale.

Entre deux trains d'onde, la phase subit une discontinuité aléatoire, alors que l'amplitude et la fréquence restent inchangées.





Signal temporel et spectre d'une suite de trains d'ondes.

Un train d'onde compte en réalité plusieurs milliers, voire dizaines de milliers, de périodes de l'onde.

Application : Largeur d'une raie spectrale et temps de cohérence

La raie verte du mercure a une longueur d'onde $\lambda = 546 \text{ nm}$ et une largeur $\Delta\lambda = 2 \cdot 10^{-2} \text{ nm}$ dans une lampe haute pression.

Déterminer son temps de cohérence.

$$\Delta\lambda = \frac{\lambda_0^2}{c\tau_c}$$

$$\tau_c = \frac{\lambda_0^2}{c\Delta\lambda} = 5 \cdot 10^{-11} \text{ s}$$

En déduire le nombre de périodes que compte un train d'onde.

$$T = \frac{1}{\nu} = \frac{\lambda}{c} = 1,8 \cdot 10^{-15} \text{ s}$$

Un train d'onde compte $\tau_c/T = 27000$ périodes.

Ce modèle des trains d'onde permet également de donner une interprétation physique de la longueur de cohérence.

La longueur de cohérence d'une source lumineuse $L_c = c \times \tau_c$ correspond à la longueur dans le vide des trains d'onde qu'elle émet.

1.3. Capteurs optiques : éclairage

Temps de réponse des capteurs optiques et conséquence

Le temps de réponse d'un capteur est la durée caractéristique des variations les plus rapides qu'il puisse transcrire : par exemple, si un capteur a un temps de réponse de 1 ms , il ne peut pas percevoir des variations sur des durées de l'ordre de quelques microsecondes. Cet aspect est déterminant en optique.

Temps de réponse des capteurs optique : le temps de réponse τ_r d'un capteur dépend énormément du circuit électronique dans lequel le capteur est intégré, les valeurs données ici ne sont que des ordres de grandeur indicatifs.

Capteur	Œil	CCD	Photodiode
τ_r	0,1 s	10^{-4} s	10^{-8} s

La période T d'une onde optique étant de l'ordre de 10^{-14} s , aucun capteur n'est capable de suivre les variations instantanées du champ électromagnétique.

Le signal délivré par tout capteur optique est proportionnel à l'énergie accumulée sur le capteur pendant une durée de l'ordre de τ_r , autrement dit à la puissance moyenne reçue pendant τ_r .

En pratique, comme $\tau_r \gg T$, on considérera dans les calculs la limite $\tau_r \rightarrow \infty$.

On appelle **intensité lumineuse $\mathcal{I}$** ou **éclairement $\mathcal{E}$** en un point M d'un capteur ou d'un écran la puissance surfacique moyenne reçue en ce point.

Une intensité lumineuse s'exprime en $W.m^{-2}$.

Le signal délivré par un capteur optique placé en un point M est proportionnel à l'éclairement en ce point.

Pour un élément de surface dS centré sur M recevant en moyenne la puissance $\langle d\mathcal{P} \rangle$, alors :

$$\mathcal{E}(M) = \frac{\langle d\mathcal{P} \rangle}{dS}$$

Éclairement et vibration lumineuse

La puissance transportée par une onde électromagnétique est liée au flux du vecteur de Poynting. Pour une OPPM se propageant dans la direction $\vec{u}$, on a montré que :

$$\vec{B} = \vec{u} \wedge \frac{\vec{E}}{c}$$

donc :

$$\vec{\Pi} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \left(\vec{u} \wedge \frac{\vec{E}}{c} \right) = \frac{E^2}{\mu_0 c} \vec{u}$$

Ainsi l'éclairement s'exprime par :

$$\mathcal{E}(M) = \frac{\langle d\mathcal{P} \rangle}{dS} = \frac{\langle \vec{\Pi} \cdot \vec{dS} \rangle}{dS}$$

$$\mathcal{E}(M) \propto \langle E^2 \rangle$$

La vibration lumineuse s et le champ électrique E sont proportionnels, d'où :

$$\mathcal{E}(M) = K \langle s(M)^2 \rangle$$

Ces calculs peuvent être menés en représentation complexe : en effet,

$$\langle s^2 \rangle \geq \frac{1}{2} \text{Re} (\underline{s} \underline{s}^*) = \frac{1}{2} |\underline{s}|^2$$

$$\mathcal{E}(M) = \frac{K}{2} |\underline{s}(M)|^2$$

Calculer un éclairement nécessite de calculer $\langle s(M)^2 \rangle$ ou de façon équivalente $|\underline{s}(M)|^2$.

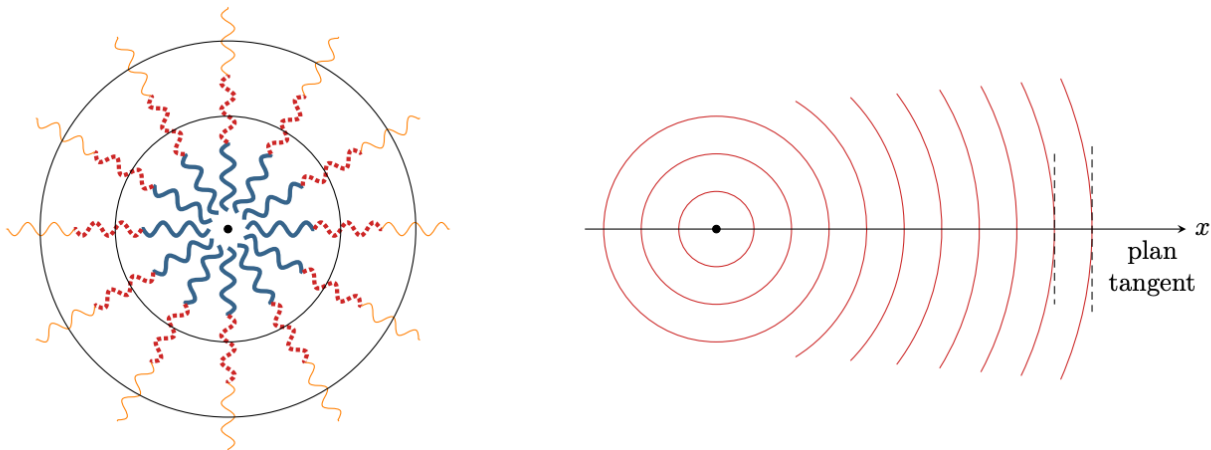
2. Optique géométrique et optique ondulatoire

2.1. Surfaces d'onde et rayons lumineux

Rappel : ondes sphériques et ondes planes

On appelle **surface d'onde** ou **front d'onde** une surface continue de l'espace sur laquelle la vibration lumineuse est uniforme à tout instant.

Si les surfaces d'onde sont des sphères concentriques, l'onde est dite **sphérique** ; s'il s'agit de plans parallèles elle est dite **plane**.



Émission d'une source ponctuelle.

Gauche : vision trains d'ondes (deux surfaces d'ondes sont représentées).

Droite : vision surfaces d'ondes.

Le rayonnement émis par une source ponctuelle est isotrope : les mêmes trains d'onde sont émis dans toutes les directions. Les surfaces d'onde sont alors des sphères. À grande distance de la source, la courbure de la sphère devient négligeable, si bien que les surfaces d'ondes peuvent être approximées par leur plan tangent.

Une source ponctuelle émet une onde sphérique, qui peut s'approximer par une onde plane à grande distance de la source.

Écriture mathématique d'une onde scalaire monochromatique :

$$s(M, t) = A(M) \cos(\omega t \pm \phi(M)) \quad \leftrightarrow \quad \underline{s}(M, t) = \underline{A}(M) \exp j(\omega t \pm \phi(M))$$

Le signe $\pm$ est choisi par convention : dans ce cours, c'est plutôt le signe $-$ qui sera utilisé. Dans le cas général, l'amplitude A et la phase ϕ de l'onde scalaire peuvent dépendre du point M : il ne s'agit pas nécessairement d'une onde plane progressive.

Cas d'une onde plane progressive monochromatique :

En toute généralité, une OPPM s'écrit :

$$s(M, t) = A \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{OM} - \varphi) \quad \leftrightarrow \quad \underline{s}(M, t) = \underline{A} \exp j(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{OM})$$

La phase $\phi(M)$ d'une OPPM s'écrit donc :

$$\phi(M) = \vec{k} \cdot \vec{OM} + \varphi$$

Remarque : Pour $\vec{k} = k \vec{e}_x$, on a $\phi(M) = kx + \varphi$.

Cas d'une onde plane progressive monochromatique :

Une onde sphérique s'écrit :

$$s(M, t) = s(r, t) = \frac{A}{r} \cos(\omega t - kr - \varphi) \quad \leftrightarrow \quad \underline{s}(M, t) = \frac{\underline{A}}{r} \exp j(\omega t - kr)$$

La phase $\phi(M)$ d'une onde sphérique s'écrit donc :

$$\phi(M) = kr + \varphi$$

Le facteur $1/r$ décrit physiquement l'étalement de l'énergie de l'onde sphérique dans tout l'espace : en supposant que la source émet une puissance lumineuse constante, alors c'est la même puissance qui traverse toutes les sphères de rayon r .

Ainsi, $\langle s(r)^2 \times 4\pi r^2 \rangle$ ne doit pas dépendre de r , d'où la décroissance de s en $1/r$.

Les surfaces d'onde des ondes monochromatiques sont donc également des **surfaces équiphasées** c'est-à-dire des surfaces sur laquelle la phase est uniforme.