

Mécanique 6 – Mécanique du solide

Dans les chapitres précédents, nous avons réduit les systèmes étudiés à des points matériels. C'est-à-dire que nous nous sommes uniquement intéressés au mouvement du centre de gravité des objets en mouvement. Désormais, nous allons étendre l'étude des solides, qui sont constitués d'un ensemble de points, pour prendre en compte les mouvements de translation, de rotation, et les interactions qui peuvent exister entre ces mouvements.

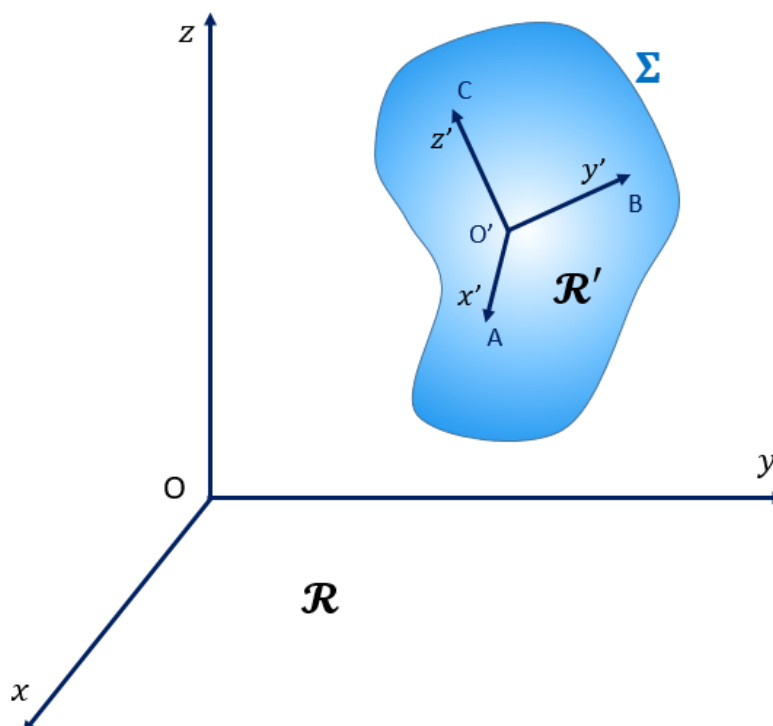
1. Cinématique du solide

1.1. Modèle du solide indéformable

Nous limiterons l'étude aux solides **indéformables** : la distance entre deux points quelconques du système est donc indépendante du temps. Il s'agit d'un modèle. Soumis à des contraintes suffisamment importantes, un solide se déforme. La physique des matériaux s'intéresse à ces propriétés que nous ignorons dans tout ce cours de mécanique des solides.

Dans la suite, on désignera brièvement par solide Σ un ensemble de points dont les distances mutuelles ne varient pas au cours du temps. Ajoutons qu'il importe peu qu'un tel solide soit rempli ou non de matière : trois points quelconques, situés à des distances mutuelles invariables, définissent le solide Σ .

Étant donné l'hypothèse d'indéformabilité, on peut définir un référentiel attaché à Σ . On choisit ainsi quatre points (O', A, B, C) du solide Σ tels que le repère $(\vec{O'A}, \vec{O'B}, \vec{O'C})$ soit orthonormé direct : celui-ci permet alors de définir un référentiel $\mathcal{R}'$ attaché au solide.



Décrire le mouvement du solide dans un référentiel $\mathcal{R}$ revient à décrire le mouvement du référentiel $\mathcal{R}'$ attaché au solide par rapport à $\mathcal{R}$.

1.2. Champs des vitesses d'un solide. Formule de Varignon

FORMULE DE VARIGNON (Loi de transport des vitesses)

Si M et N sont deux points qui appartiennent au même solide, alors leurs vitesses au même instant t sont liées par la **formule de Varignon** :

$$\vec{v}_{N/\mathcal{R}} = \vec{v}_{M/\mathcal{R}} + \vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \overrightarrow{MN}$$

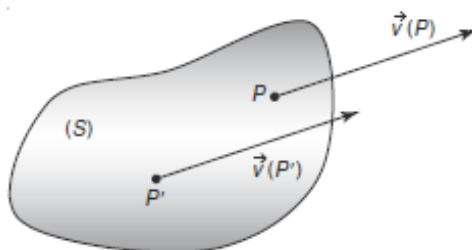
Où $\vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}$ est le vecteur rotation instantané.

A VOUS DE JOUER

Proposer une démonstration de la formule de Varignon.

1.3. Cas particuliers de mouvements d'un solide

▪ Solide en translation



DEFINITION

Un solide est en translation si le vecteur rotation instantané $\vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}$ est constamment nul. La vitesse est alors la même en tout point du solide.

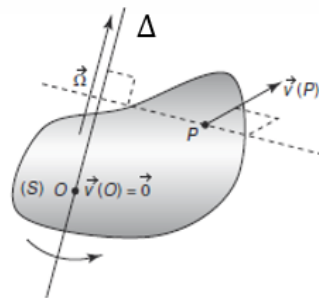
ATTENTION



Il ne faut pas confondre mouvement de translation d'un solide et mouvement rectiligne !

En effet, un solide peut décrire un mouvement de translation circulaire. Chaque point du solide décrit alors un cercle. Par exemple, une nacelle dans une grande roue a un mouvement de translation circulaire.

▪ Solide en rotation autour d'un axe fixe



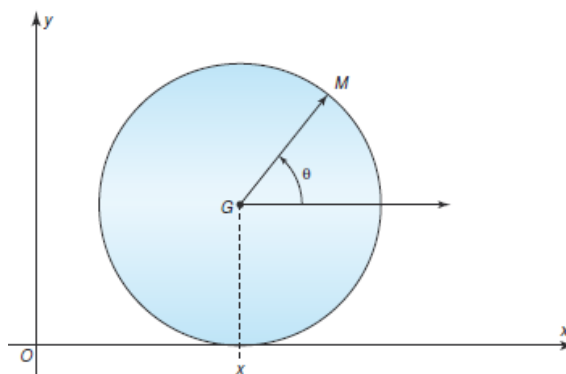
Considérons un solide en rotation autour d'un axe fixe Δ . Si un point du solide est sur l'axe de rotation, sa vitesse est nulle. Notons O un tel point. Le champ des vitesses s'écrit alors sous la forme :

$$\vec{v}_M = \vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \overrightarrow{OM}$$

L'axe de rotation est dirigé selon le vecteur rotation instantané qui présente une direction fixe. Tous les points du solide décrivent des cercles de même axe, l'axe de rotation Δ . Si aucun point du solide ne se trouve sur l'axe de rotation, on peut cependant considérer un point O de l'axe et retenir l'expression suivant pour le champ des vitesses du solide :

$$\vec{v}_M = \vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \overrightarrow{OM}$$

▪ Solide en rotation autour d'un axe de direction fixe

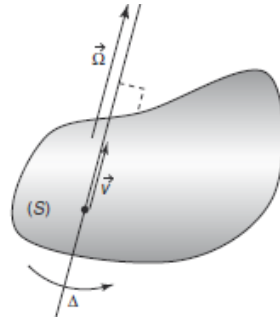


L'axe de rotation peut également se déplacer par un mouvement de translation en gardant une direction fixe, comme les essieux d'une voiture, l'axe de rotation d'une roue de vélo, etc. Dans ce cas le mouvement du solide doit être décomposé en deux termes :

- Rotation dans son référentiel barycentrique autour d'un axe de même direction : on étudie le mouvement d'un point avec l'angle θ en coordonnées polaires (schéma ci-dessus)
- Translation de son centre d'inertie G , que l'on repère par exemple par son abscisse x (schéma ci-dessus)

■ Mouvement général d'un solide

Le mouvement le plus général d'un solide est la composition à chaque instant d'une rotation de vitesse angulaire $\vec{\Omega}$ autour de l'**axe instantané de rotation** (voir schéma ci-dessous) et d'une translation à vitesse $\vec{v}$.



L'axe instantané de rotation est défini par le **lieu des points fixes par rapport au solide**

1.4. Contact entre deux solides / vitesse de glissement

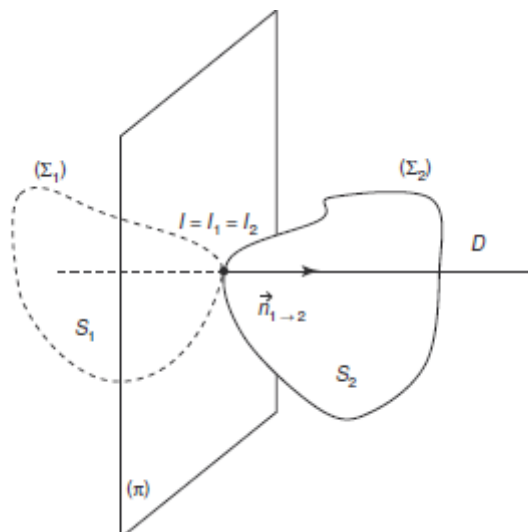
Le contact entre deux solides peut se faire de différentes manières :

		
Contact selon une surface	Contact selon une ligne	Contact en un point

Les deux derniers cas sont en réalité des modèles. Le contact réel se fait toujours selon une surface, de dimensions éventuellement très petites. On se ramènera cependant au cas d'un point de contact pour des systèmes dont on peut étudier la « trace » dans un plan (roue cylindrique).

Vitesse de glissement

Considérons un contact ponctuel entre deux solides Σ_1 et Σ_2 . Notons I le point de contact.



Il est important de distinguer trois points différents, bien qu'ils soient confondus géométriquement :

- Le point I de l'espace qui est l'intersection des surfaces des deux solides ;
- le point matériel I_1 appartenant au solide 1 et coïncidant, à l'instant t, avec I ;
- le point matériel I_2 appartenant au solide 2 et coïncidant, à l'instant t, avec I.

DEFINITION

On appelle vitesse de glissement de Σ_2 par rapport à Σ_1 la vitesse relative :

$$\vec{v}_{I_2} - \vec{v}_{I_1} = \vec{v}_{I_2/\Sigma_1}$$

La vitesse de glissement est indépendante du référentiel d'étude. On peut, en particulier, la déterminer dans un référentiel attaché à l'un des solides.

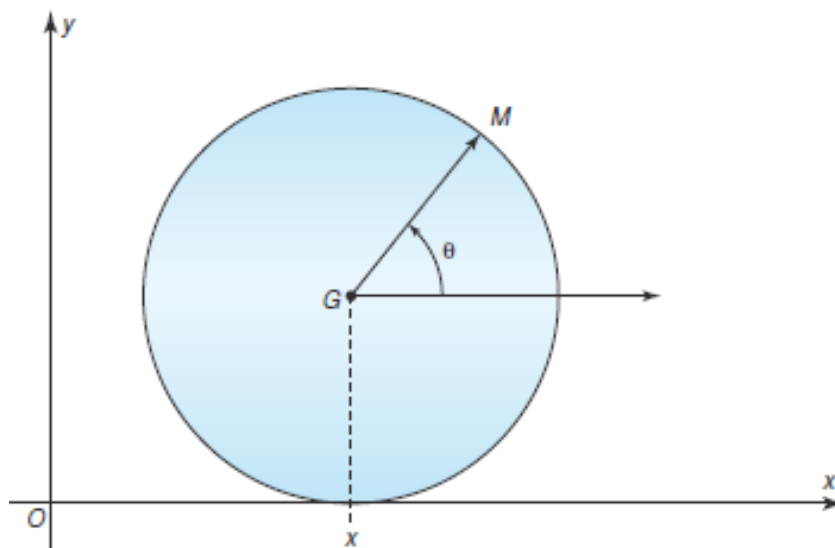
La vitesse de glissement est nécessairement dans le plan tangent Π (voir schéma ci-dessus) commun aux deux solides. Dans le cas contraire, il y aurait rupture du contact ou interpénétration des solides

CONDITION DE ROULEMENT SANS GLISSEMENT

Un solide Σ_2 , en contact avec un solide Σ_1 , roule sans glisser lorsqu'en tout point de contact **la vitesse de glissement est nulle**.

Afin de déterminer si un solide roule sans glisser par rapport à un autre, il faut établir la vitesse de deux points coïncidents à un instant donné, l'un appartenant à un solide, l'autre au second solide, puis en déduire la vitesse de glissement.

A VOUS DE JOUER



On reprend l'exemple précédent de la rotation autour d'un axe fixe. On considère un disque de rayon R dont le centre C est repéré par la coordonnée cartésienne x . La position d'un point M à la périphérie du disque est repérée par un angle θ par rapport à un axe de direction fixe. Le disque roule sans glisser sur un plan horizontal.

1. Déterminer la relation entre x et θ .

2. Que devient la relation précédente si le sol horizontal est remplacé par un tapis roulant se déplaçant à la vitesse $v_0 \vec{u}_x$?

1.5. Composition des vitesses, des accélérations, des vecteurs rotation

RAPPEL

Soient $\mathcal{R}$ le référentiel d'étude (référentiel absolu) et $\mathcal{R}'$ un référentiel en mouvement dans $\mathcal{R}$ (référentiel relatif). Le mouvement de $\mathcal{R}'$ est caractérisé par le vecteur vitesse $\vec{v}_O$ et le vecteur vitesse angulaire $\vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}$. Soit M un point matériel dont on étudie le mouvement dans chacun des référentiels.

Loi de composition des vitesses

$$\vec{v}_{M/\mathcal{R}} = \vec{v}_{M/\mathcal{R}'} + \vec{v}_e(M)$$

Où $\vec{v}_e(M)$ est la vitesse d'entraînement, la vitesse d'un point lié à $\mathcal{R}'$ coïncidant avec M :

$$\vec{v}_e(M) = \vec{v}_{O'} + \vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \overrightarrow{O'M}$$

Loi de composition des accélérations

$$\vec{a}_{M/\mathcal{R}} = \vec{a}_{M/\mathcal{R}'} + \vec{a}_e(M) + \vec{a}_c(M)$$

Où $\vec{a}_e(M)$ est l'accélération d'entraînement, l'accélération d'un point lié à $\mathcal{R}'$ coïncidant avec M et $\vec{a}_c(M)$ l'accélération de Coriolis :

$$\begin{aligned}\vec{a}_e(M) &= \vec{a}_{O'} + \frac{d\vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}}{dt} \wedge \overrightarrow{O'M} + \vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge (\vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \overrightarrow{O'M}) \\ \vec{a}_c(M) &= 2\vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \vec{v}_{M/\mathcal{R}'}\end{aligned}$$

Composition des vecteurs rotation

Soit $\vec{\Omega}_{\Sigma/\mathcal{R}'}$ le vecteur de rotation d'un solide dans le référentiel $\mathcal{R}'$, lui-même en rotation de vecteur $\vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}$ par rapport à un référentiel $\mathcal{R}$. Le solide a alors pour vecteur instantané de rotation dans $\mathcal{R}$:

$$\vec{\Omega}_{\Sigma/\mathcal{R}} = \vec{\Omega}_{\Sigma/\mathcal{R}'} + \vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}$$

2. Eléments de cinétique d'un solide

Jusqu'ici nous avons étudié la cinématique (description du mouvement indépendamment des causes qui le créent) et la dynamique (étude des causes du mouvement). En réalité nous avons également utilisé des concepts d'une autre branche de la mécanique : la cinétique. La cinétique prolonge la cinématique en intégrant le concept de masse. Par exemple, les notions de quantité de mouvement ou d'énergie cinétique sont des notions de cinétique. Nous allons voir en mécanique du solide d'autres concepts cinétiques, particulièrement utiles lorsqu'ensuite nous aborderons la dynamique du solide.

2.1. Centre de masse d'un solide

En mécanique newtonienne, la masse présente la propriété d'additivité : la masse d'un ensemble discret de n corps ponctuels est la somme des masses des différents corps.

$$M = \sum_{i=1}^n m_i$$

Un solide Σ est une distribution continue de masses, on obtient sa masse en calculant l'intégrale de volume suivante :

$$M = \int_{\Sigma} dm = \int_V \rho(A) dV$$

Où $\rho(A)$ est la masse volumique au point A et V le volume contenant l'ensemble des masses.

DEFINITION

On appelle **centre de masse** G (parfois par abus de langage barycentre) d'un solide Σ le barycentre des points matériels qui constituent Σ affectés de leur masse respective.

- Pour un ensemble discret de n points matériels A_i de masses m_i :

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i \overrightarrow{OA_i}$$

Où O est un point choisi arbitrairement (origine quelconque) et M la masse totale du système.

On remarque que si l'on remplace O par G dans l'équation précédente, on peut également écrire :

$$\sum_{i=1}^n m_i \overrightarrow{GA_i} = 0$$

- Pour un solide constitué d'une distribution continue de points A de masse volumique $\rho(A)$:

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{M} \int_V \rho(A) \overrightarrow{OA} dV$$

Ou encore :

$$\int_V \rho(A) \overrightarrow{GA} dV = \vec{0}$$

2.2. Résultante cinétique et moment cinétique

Ce sont les deux grandeurs fondamentales en mécanique du solide, celles qui se conservent pour les systèmes isolés, et que l'on utilisera pour appliquer les théorèmes de la dynamique.

Résultante cinétique

La résultante cinétique est la quantité de mouvement totale du solide Σ .

- Pour un ensemble discret de n points matériels A_i de masses m_i et de vitesses $\vec{v}_i$:

$$\vec{p} = \sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_i$$

En reprenant la définition précédente du centre de masse nous avons :

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i \overrightarrow{OA_i}$$

En dérivant cette équation on obtient :

$$\vec{v}_G = \frac{d\vec{OG}}{dt} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i \frac{d\vec{OA}_i}{dt} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_i = \frac{1}{M} \vec{p}$$

On obtient le résultat important suivant :

$$\vec{p} = M \vec{v}_G$$

- Pour un solide constitué d'une distribution continue de points A de masse volumique $\rho(A)$:

$$\vec{p} = \int_V \rho(A) \vec{v}(A) dV$$

Comme précédemment, nous pouvons dériver l'équation de définition du centre de gravité :

$$\vec{v}_G = \frac{d\vec{OG}}{dt} = \frac{1}{M} \int_V \rho(A) \frac{d\vec{OA}}{dt} dV = \frac{1}{M} \int_V \rho(A) \vec{v}(A) dV = \frac{1}{M} \vec{p}$$

On retrouve donc le même résultat que pour un ensemble discret :

$$\vec{p} = M \vec{v}_G$$

A RETENIR

La résultante cinétique d'un solide Σ de centre de gravité G et de masse M s'écrit :

$$\vec{p} = M \vec{v}_G$$

Moment cinétique

On rappelle que le moment cinétique se définit par rapport à un point de référence (chapitre précédent) que l'on notera O.

- Pour un ensemble discret de n points matériels A_i de masses m_i et de vitesses $\vec{v}_i$:

$$\vec{L}_O(\Sigma) = \sum_{i=1}^n \vec{OA}_i \wedge m_i \vec{v}_i$$

- Pour un solide constitué d'une distribution continue de points A de masse volumique $\rho(A)$:

$$\vec{L}_O(\Sigma) = \int_V \vec{OA} \wedge \rho(A) dV \vec{v}(A)$$

Le théorème de transport du moment cinétique, vu dans le chapitre précédent, demeure valable :

$$\vec{L}_{O'}(\Sigma) = \vec{L}_O(\Sigma) + \vec{OO'} \wedge \vec{p}$$

2.3. Référentiel barycentrique – Théorème de Koenig

En mécanique du solide, il est souvent aisé de choisir le référentiel barycentrique pour étudier le mouvement car celui-ci se réduit alors à un mouvement de rotation autour de G.

DEFINITION

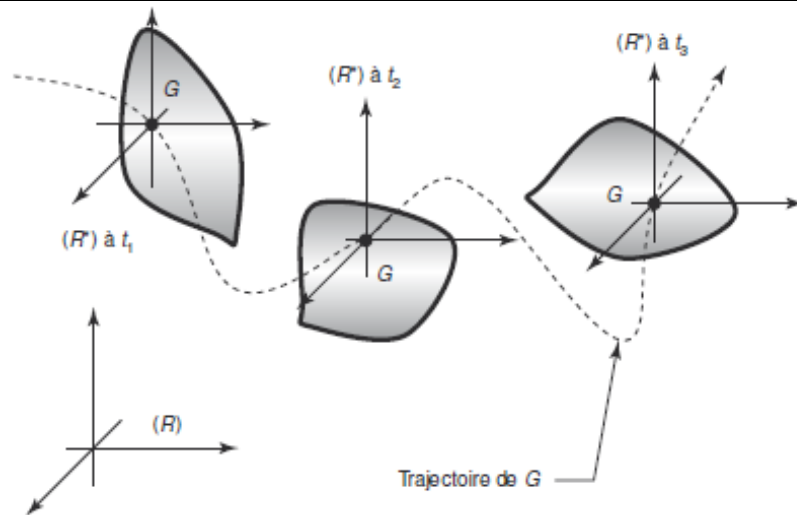
Le **référentiel barycentrique** d'un solide Σ , noté $\mathcal{R}^*$ est un référentiel **en translation** par rapport au référentiel $\mathcal{R}$ de référence, dans lequel le centre de masse G est **immobile**.

Par conséquent, la vitesse et l'accélération de G sont nulles dans $\mathcal{R}^*$:

$$\vec{v}_G^* = \vec{0} ; \vec{a}_G^* = \vec{0}$$

Par ailleurs, comme le mouvement de $\mathcal{R}^*$ est une translation, son vecteur de rotation par rapport à $\mathcal{R}$ est également nul :

$$\vec{\Omega}_{\mathcal{R}^*/\mathcal{R}} = \vec{0}$$



Composition des vitesses et des accélérations

Les deux référentiels $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}^*$ sont en translation l'un par rapport à l'autre. Nous avons donc :

$$\vec{v}_{M/\mathcal{R}} = \vec{v}_M^* + \vec{v}_G$$

$$\vec{a}_{M/\mathcal{R}} = \vec{a}_M^* + \vec{a}_G$$

Conséquences :

- La résultante cinétique dans $\mathcal{R}^*$ est nulle : $\vec{p}^* = \vec{0}$
- Le moment cinétique barycentrique $\vec{L}^*$ est **indépendant du point de réduction** (le point par rapport auquel on calcule le moment). C'est pourquoi on n'indique pas de point en indice. On peut le calculer à partir de tout point, en particulier à partir du centre de masse G

2.4. Théorème de Koenig

Le théorème de Koenig permet d'exprimer le moment cinétique d'un solide $\vec{L}_O(\Sigma)$ dans un référentiel $\mathcal{R}$ en fonction du moment cinétique barycentrique $\vec{L}^*$.

THEOREME DE KOENIG

Soit un solide Σ de de masse M de centre de masse G . Le moment cinétique $\vec{L}_O(\Sigma)$ de Σ dans un référentiel $\mathcal{R}$ par rapport à un point O attaché à $\mathcal{R}$ s'écrit :

$$\vec{L}_O(\Sigma) = M \overrightarrow{OG} \wedge \vec{v}_G + \vec{L}^* = \overrightarrow{OG} \wedge \vec{p} + \vec{L}^*$$

Une écriture utile et particulièrement importante de ce théorème est celle où le centre de réduction est le centre de masse G :

$$\vec{L}_G(\Sigma) = \vec{L}^*$$

ATTENTION

Ne pas confondre cette expression avec un théorème de transport !

A VOUS DE JOUER

Démontrer le théorème de Koenig.

2.5. Moment d'inertie d'un solide – moment cinétique par rapport un axe fixe



Le moment d'inertie J_{Δ} d'un solide caractérise son inertie vis-à-vis de la rotation. Il joue donc le même rôle que la masse vis-à-vis de la translation.

Le moment d'inertie dépend de la valeur et de la répartition des masses au sein du système. Par exemple, dans l'image ci-contre on voit qu'en serrant ses bras le long du corps, la patineuse diminue son moment d'inertie, augmentant sa vitesse de rotation, puisque son moment cinétique est conservé.

A VOUS DE JOUER

On considère le mouvement d'un point matériel M dans un référentiel galiléen $\mathcal{R}$ et un axe Δ orienté fixe. On fait coïncider l'axe (Oz) avec Δ et on repère M à l'aide des coordonnées cylindriques.

1. Rappeler l'expression du vecteur position $\overrightarrow{OM}$ en coordonnées cylindriques.
2. Rappeler l'expression du vecteur vitesse $\vec{v}$ en coordonnées cylindriques.

3. Calculer le moment cinétique $L_{\Delta/\mathcal{R}}(M)$ du point M par rapport à l'axe Δ . Montrer qu'il s'exprime sous la forme $L_{\Delta/\mathcal{R}}(M) = J_{\Delta}\dot{\theta}$ où on explicitera J_{Δ} .

DEFINITION

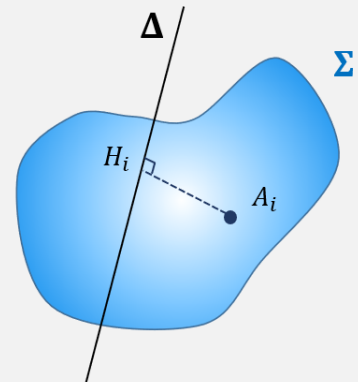
- Pour un ensemble discret de n points matériels A_i de masses m_i , on appelle **moment d'inertie J_{Δ} par rapport à un axe Δ** la quantité **positive** :

$$J_{\Delta} = \sum_{i=1}^n m_i d_i^2 = \sum_{i=1}^n m_i H_i A_i^2$$

$d_i = H_i A_i$ étant la distance du point A_i à l'axe Δ , donc H_i la projection de A_i sur l'axe.

- Pour un solide constitué d'une distribution continue de points A de masse volumique $\rho(A)$:

$$J_{\Delta} = \int_V \rho(A) H A^2 dV$$



Moment cinétique d'un solide par rapport à un axe de direction fixe

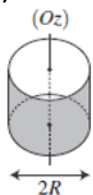
DEFINITION

Le moment cinétique par rapport à l'axe Δ d'un solide Σ en rotation autour de Δ à la vitesse angulaire $\dot{\theta}$ vaut :

$$L_{\Delta/\mathcal{R}}(\Sigma) = J_{\Delta}\dot{\theta}$$

Quelques exemples

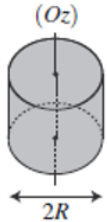
- Cylindre vide de rayon R



Les points du cylindre sont tous situés sur une surface à une distance R de l'axe.

$$J_{\Delta} = \int_V \rho(A) H A^2 dV = \int_V \rho(A) R^2 dV = R^2 \int_V \rho(A) dV = m R^2$$

- Cylindre plein de rayon R (masse volumique uniforme ρ)



L'intégration est plus compliquée car les points ne sont pas tous à la même distance de l'axe. En utilisant les coordonnées cylindriques, on subdivise le cylindre plein en cylindres vides de rayon r et d'épaisseur dr :

$$J_{\Delta} = \int_V \rho(A) H A^2 dV = \int_{z=0}^h \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{r=0}^R \rho(A) r^2 r d\theta dr dz$$

$$= 2\pi h \rho \int_{r=0}^R r^3 dr = 2\pi h \rho \left[\frac{r^4}{4} \right]_0^R = 2\pi h \rho \frac{R^4}{4}$$

Calculons la masse pour éliminer ρ dans l'équation :

$$m = \int_V \rho(A) dV = \int_{z=0}^h \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{r=0}^R \rho r d\theta dr dz = 2\pi h \rho \int_{r=0}^R r dr = 2\pi h \rho \left[\frac{r^2}{2} \right]_0^R = 2\pi h \rho \frac{R^2}{2}$$

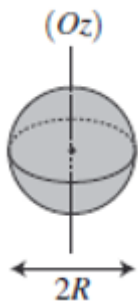
On obtient alors :

$$J_{\Delta} = \frac{1}{2} m R^2$$

- Boule de rayon R (masse volumique uniforme ρ)

A VOUS DE JOUER

Montrer que le moment d'inertie d'une boule de rayon R vaut : $J_{\Delta} = \frac{2}{5} m R^2$



- Barre de longueur L

A VOUS DE JOUER

Montrer que le moment d'inertie d'une barre de longueur L vaut : $J_{\Delta} = \frac{1}{12} m L^2$



A RETENIR

Plus une masse est éloignée de l'axe de rotation, plus sa contribution au moment d'inertie est importante.
Exemple : la patineuse en rotation.

2.6. Théorème de Huygens

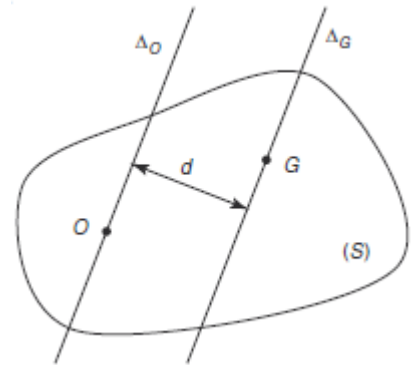
Le théorème de Huygens est analogue à un théorème de transport pour le moment d'inertie : il permet de changer de point de référence pour le calcul, lorsqu'on connaît le moment d'inertie par rapport au centre de masse.

Par contre l'axe reste parallèle à l'axe initial.

THEOREME DE HUYGENS

Soit G le centre de masse d'un solide Σ dont la masse totale est M. Soit J_{Δ_G} le moment d'inertie de ce solide par rapport à un axe Δ_G passant par G. On note J_{Δ_O} le moment d'inertie de ce solide par rapport à un axe Δ_O passant par un point O du solide et parallèle à Δ_G . On note d la distance entre O et G. Les deux moments d'inertie sont alors liés par la relation :

$$J_{\Delta_O} = J_{\Delta_G} + Md^2$$



A VOUS DE JOUER

Proposer une démonstration du théorème de Huygens.

Application : calculer le moment d'inertie d'une barre de longueur L par rapport à un axe passant par l'une de ses extrémités, par une méthode directe, puis en utilisant le résultat précédent (moment d'inertie par rapport à l'axe passant par le centre : $J_{\Delta} = \frac{1}{12} mL^2$)

3. Dynamique du solide

L'étude du mouvement d'un solide doit se faire en deux étapes :

- Etude du **mouvement de translation** : il s'agit du mouvement du centre de masse G , c'est-à-dire qu'on se ramène à un problème de mécanique du point matériel. Nous savons donc le faire !
- Etude du **mouvement de rotation** autour d'un axe fixe Δ : ce mouvement est étudié indépendamment de la translation, à l'aide de la loi du moment cinétique par rapport à l'axe Δ . Nous avons déjà rencontré cette loi pour un point matériel, nous allons ici la généraliser au cas du solide.

3.1. Théorème de la résultante cinétique

Il s'agit de la généralisation du principe fondamental de la dynamique pour un solide. Ce théorème va donner une importance capitale au centre de masse du système, puisqu'il détermine son mouvement.

THEOREME DE LA RESULTANTE CINETIQUE

On considère un solide Σ , de centre de masse G , de masse M et de résultante cinétique $\vec{p} = M\vec{v}_G$ par rapport à un référentiel galiléen $\mathcal{R}$. Le solide est soumis à un ensemble de forces extérieures $\vec{F}_i$. On a alors :

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \sum_i \vec{F}_i$$

Pour un système fermé (dont la masse M ne varie pas) on peut alors écrire :

$$M \frac{d\vec{v}_G}{dt} = \sum_i \vec{F}_i$$

3.2. Lois du moment cinétique pour un solide

A RETENIR

- Soit O un **point fixe** d'un référentiel $\mathcal{R}$ galiléen. La dérivée temporelle du moment cinétique du solide par rapport à O est égale à la somme des moments des forces extérieures par rapport à ce même axe :

$$\left(\frac{d\vec{L}_O(\Sigma)}{dt} \right)_{\mathcal{R}} = \sum_i \vec{\mathcal{M}}_{O, \vec{F}_i}$$

- Soit O un **point mobile** du référentiel $\mathcal{R}$ galiléen. L'expression précédente devient alors :

$$\left(\frac{d\vec{L}_O(\Sigma)}{dt} \right)_{\mathcal{R}} = \sum_i \vec{\mathcal{M}}_{O, \vec{F}_i} + \vec{p} \wedge \vec{v}_O$$

- Soit l'axe de rotation fixe Δ . On a alors :

$$\left(\frac{dL_{\Delta/\mathcal{R}}(\Sigma)}{dt} \right)_{\mathcal{R}} = \sum_i \mathcal{M}_{\Delta, \vec{F}_i}$$

Pour un solide en rotation autour de l'axe Δ le moment d'inertie J_{Δ} est constant. On a alors :

$$\left(\frac{dL_{\Delta/\mathcal{R}}(\Sigma)}{dt} \right)_{\mathcal{R}} = \left(\frac{dJ_{\Delta}\dot{\theta}}{dt} \right)_{\mathcal{R}} = J_{\Delta}\ddot{\theta}$$

On peut donc réécrire le théorème du moment cinétique comme suit :

$$J_{\Delta}\ddot{\theta} = \sum_i \mathcal{M}_{\Delta, \vec{F}_i}$$

On remarque que cette dernière équation est formellement analogue au principe fondamental de la dynamique en projection sur un axe (par exemple l'axe Ox) :

$$m\ddot{x} = \sum_i \vec{F}_i \cdot \vec{u}_x$$

L'accélération linéaire $\ddot{x}$ est remplacée par l'accélération angulaire $\ddot{\theta}$, la résultante des forces projetées sur l'axe du mouvement par les moments des forces projetées sur l'axe de rotation. La masse m , dont on rappelle qu'elle caractérise l'inertie par rapport au mouvement de translation du solide est remplacée par le moment d'inertie J_{Δ} . Cela permet de donner une interprétation physique du moment d'inertie du solide.

A RETENIR

Le moment d'inertie J_{Δ} d'un solide par rapport à l'axe Δ est sa caractéristique intrinsèque qui mesure son aptitude à s'opposer aux variations de sa vitesse de rotation autour de cet axe.

Théorème du moment cinétique dans le référentiel barycentrique

A VOUS DE JOUER

Démontrer que le théorème du moment cinétique peut être appliqué dans $\mathcal{R}^*$ même si celui-ci n'est pas galiléen.

3.3. Condition d'équilibre pour un solide

D'après ce qui précède, un solide est en équilibre lorsque les résultantes des forces et de leurs moments (par rapport à n'importe quel point O) sont nulles :

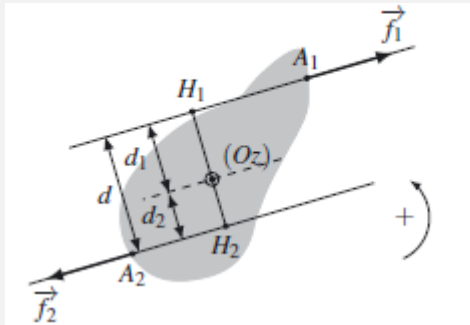
$$\sum_i \vec{F}_i = \vec{0}$$

$$\sum_i \vec{\mathcal{M}}_{O, \vec{F}_i} = \vec{0}$$

3.4. Couple de forces

La notion de couple de forces est importante en mécanique du solide. Le couple est au mouvement de rotation ce que la force est au mouvement de translation. Le couple est ce qui provoque une accélération angulaire, et une rotation dans le plan perpendiculaire à la direction du couple.

DEFINITION



Deux forces $\vec{F}_1$ et $\vec{F}_2$ forment un **couple** si elles sont opposées ($\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$) et que leurs droites d'actions sont distinctes.

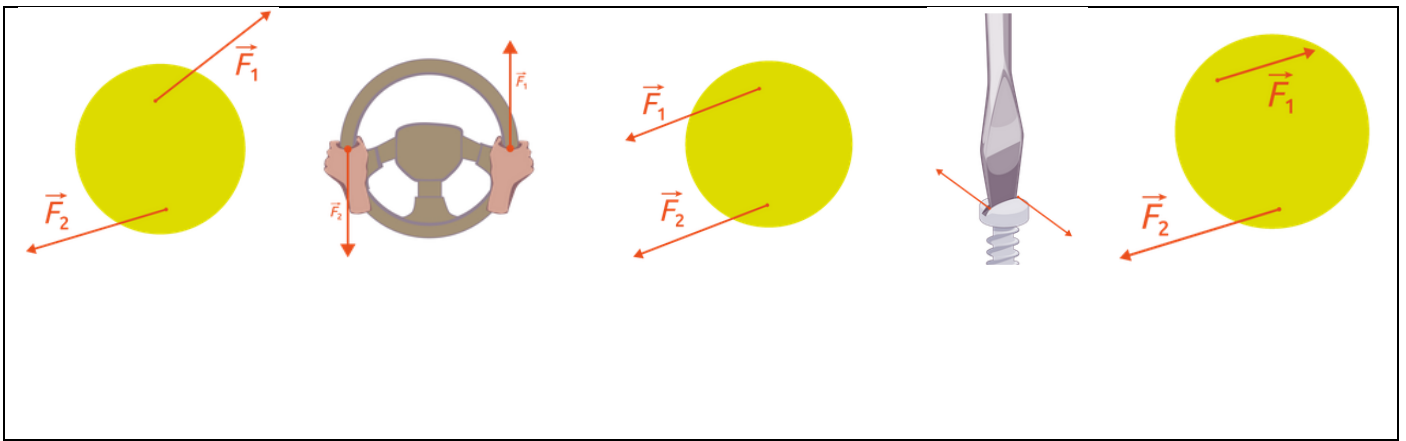
La distance d entre les deux droites d'action est appelée **bras de levier**.

L'opérateur applique un couple de forces ($\vec{F}_1, \vec{F}_2$) afin de mettre en rotation la clé en croix.	Les deux forces qui n'ont aucune action sur la rotation. Il ne s'agit pas d'un couple car elles sont portées par la même droite d'action.

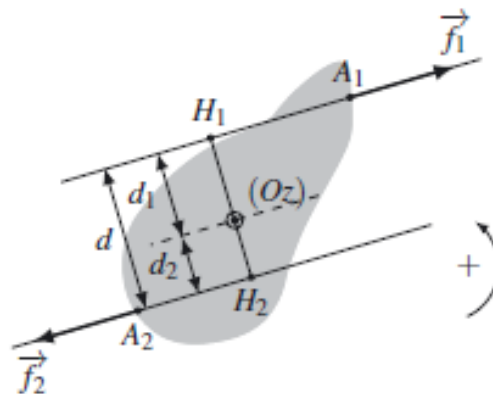
La résultante des deux forces est nulle : $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \vec{0}$; cela signifie qu'un couple de forces n'est pas capable d'induire (ou modifier) un mouvement de translation du solide. Il agit uniquement sur le mouvement de rotation.

A VOUS DE JOUER

Pour chacun des exemples suivants, indiquer si les deux forces forment un couple ou non, en justifiant la réponse.



3.5. Moment d'un couple



A VOUS DE JOUER

1. A partir du schéma ci-dessus, montrer que le moment de la force $\vec{F}_1$ par rapport au point O peut s'écrire : $\vec{M}_{O, \vec{F}_1} = \overrightarrow{OH_1} \wedge \vec{F}_1$; écrire de même l'expression de $\vec{M}_{O, \vec{F}_2}$
2. En déduire que le moment $\vec{\Gamma}_O$ du couple $(\vec{F}_1, \vec{F}_2)$ par rapport à O peut être mis sous la forme :
$$\vec{\Gamma}_O = \overrightarrow{H_2H_1} \wedge \vec{F}_1$$
3. Ecrire finalement $\vec{\Gamma}_O$ sous la forme $\vec{\Gamma}_O = \Gamma \vec{u}_z$ en explicitant Γ en fonction de $F = \|\vec{F}_1\| = \|\vec{F}_2\|$ et d le bras de levier du couple. Commenter le signe.

4. Indiquer si le moment du couple dépend de l'axe de rotation.

A RETENIR

Dans l'analogie entre rotation et translation, l'analogue d'une force n'est donc pas le couple à proprement parler mais son moment $\vec{\Gamma}$. Par abus de langage, on qualifie souvent $\vec{\Gamma}$ de « couple » de force (alors qu'il s'agit de son moment).

3.6. Généralisation

Dans la plupart des cas, on parle de couple pour analyser le mouvement d'une pièce mécanique capable de pivoter autour d'un axe fixe, mais sans degré de liberté dans ses autres mouvements. Une telle liaison mécanique transforme nécessairement en couple toute force extérieure qui lui est appliquée, parce que les points de liaison de l'axe imposent une réaction interne implicite. En pratique, en effet, ces points de liaison de l'axe ajoutent à la pièce mécanique des forces de réaction, induites par le système de force extérieur, ces forces de réaction jouant de telle manière que :

- La somme de toutes les forces externes et internes est nulle, puisque la pièce mécanique n'a pas de mouvement de translation ;
- La somme de tous les moments est alignée avec l'axe de pivotement de la pièce.