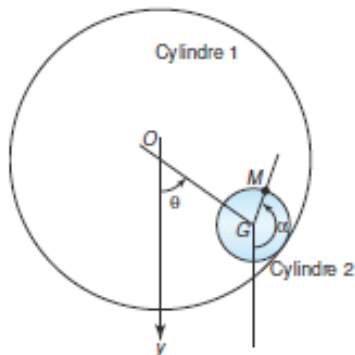


TD 10

Mécanique du solide

Exercice 1 : Cinématique – application du cours

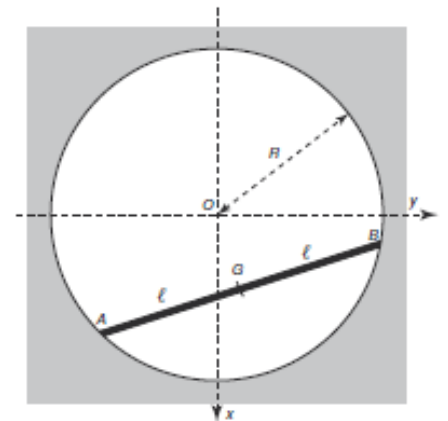
1. Condition de roulement sans glissement



Un cylindre 2 de rayon R_2 roule sans glisser à l'intérieur d'un cylindre creux 1 de rayon R_1 . Le cylindre 1 est fixe. La position du cylindre 2 est repérée par deux angles. L'un, θ , correspond à l'angle entre la verticale descendante et (OG) où O désigne un point de l'axe du cylindre creux et G le centre du cylindre 2. Le second, α , correspond à l'angle entre la verticale descendante passant par G et (GM) où M est un point fixe sur le cylindre 2. Établir la condition de roulement sans glissement.

2. Mouvement d'une tige dans un cylindre

On considère une tige homogène de longueur $2l$ dont les extrémités A et B restent en contact avec les parois d'un cylindre de rayon $R > l$. La section est négligeable. On écarte un peu la tige de sa position d'équilibre (horizontale) et la tige glisse sans frottement dans le cylindre, dans le plan vertical (Oxy). Le référentiel d'étude est lié au cylindre.



1. Déterminer la distance $p = OG$ en fonction de R et l . Quel est le mouvement de G ?
2. Soit θ l'angle entre Ox et la droite OG. Exprimer le vecteur vitesse ainsi que le vecteur accélération de G en fonction des données et de la variable θ .
3. Quelle est l'expression du vecteur vitesse angulaire de la barre ? On utilisera deux méthodes

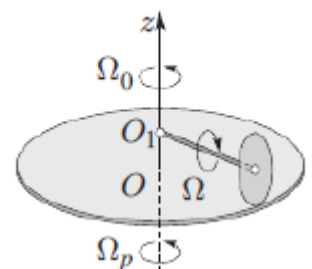
3. Pièce roulant sur un plan

Une pièce verticale, de centre C et de rayon b , roule sans glisser sur une table horizontale à la vitesse angulaire ω . Dans le référentiel de la table :

1. Déterminer géométriquement la position de l'axe instantané de rotation.
2. Déterminer le vecteur instantané de rotation de ce solide.
3. Déterminer la relation entre vitesse v_C du centre de la pièce et la vitesse angulaire ω .
4. Soit M un point de la pièce tel que $CM=b$. En supposant que la vitesse angulaire est constante, tracer la norme de la vitesse de M en fonction du temps.

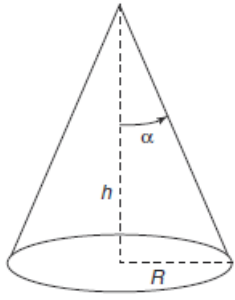
4. Mise en rotation d'un plateau

Un plateau de rayon R est mis en rotation, autour d'un axe Oz par un disque, de rayon r , qui roule sans glisser sur le pourtour du plateau. L'axe du disque est une tige, passant par le point O_1 de Oz, parallèle au plateau, et tournant autour de Oz avec une vitesse angulaire Ω_0 .



1. Établir la relation entre Ω_0 , la vitesse de rotation du plateau Ω_p et celle du disque Ω .
2. Exprimer la vitesse du point H le plus haut du disque. Cas particulier où le plateau est bloqué.

Exercice 2 : Cinétique – application du cours



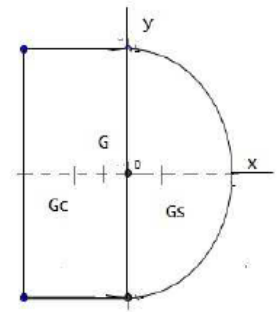
1. Centre de masse d'un cône

Déterminer la position du centre de masse d'un cône de révolution homogène, de masse M , de hauteur h , dont la base est un disque de rayon R .

2. Centre de masse d'un solide composé

On considère un solide en fer (masse volumique $\rho_{Fe} = 7800 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$) formé d'un cylindre et d'une demi-sphère.

La hauteur du cylindre est $h=10 \text{ cm}$, le rayon de la sphère et du cylindre valent $R=10 \text{ cm}$. Déterminer la position du centre de masse de l'ensemble.



G_c = centre de gravité du cylindre
 G_s = centre de gravité de l'hémisphère
 G = centre de gravité résultant

3. Ordres de grandeur des moments cinétiques

- Le moment d'inertie de la Terre en rotation uniforme autour de l'axe passant par ses pôles vaut $J = 0,33 M_T R_T^2$ avec $M_T = 6,0 \cdot 10^{24} \text{ kg}$ et $R_T = 6,4 \cdot 10^3 \text{ km}$. Calculer le moment d'inertie de la Terre et son moment cinétique par rapport à l'axe des pôles.
- Un tambour de machine à laver de rayon $R = 25 \text{ cm}$ et de masse $m = 5 \text{ kg}$ tourne à la vitesse angulaire de $1000 \text{ tr} \cdot \text{min}^{-1}$. Calculer son moment cinétique par rapport à son axe de rotation sachant que son moment d'inertie par rapport à cet axe vaut $J = mR^2$.

Exercice 3 : Mouvement de rotation d'une tige homogène

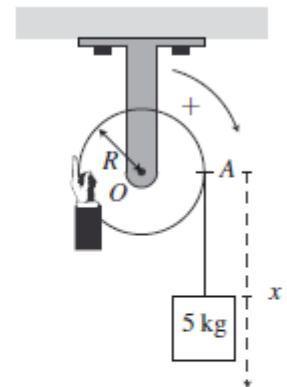
Une tige rigide, de longueur l , de section négligeable, de masse M répartie uniformément sur la longueur l , tourne dans le plan Oxy à la vitesse angulaire ω autour de l'extrémité O de la tige. La position de la tige est repérée par l'angle θ . On a $\omega = \dot{\theta}$. On note $\mathcal{R}$ le référentiel lié aux axes (Ox, Oy) .

- Déterminer le mouvement du référentiel barycentrique $\mathcal{R}^*$ de la tige et représenter les axes liés à $\mathcal{R}^*$ à deux instants différents. Exprimer la résultante cinétique (quantité de mouvement) $\vec{P}$ de la tige.
- Calculer $J_{\Delta O}$, le moment d'inertie de la barre par rapport à son axe de rotation.
- En déduire $L_{\Delta O}$, le moment cinétique de cette tige en fonction de M , l , et ω .
- Déterminer $J_{\Delta G}$ (moment d'inertie par rapport à l'axe passant par le centre de masse) et L^* sans calcul intégral.
- Calculer directement $J_{\Delta G}$ par une intégrale dans $\mathcal{R}^*$. Conclure.

Exercice 4 : Etude d'une poulie

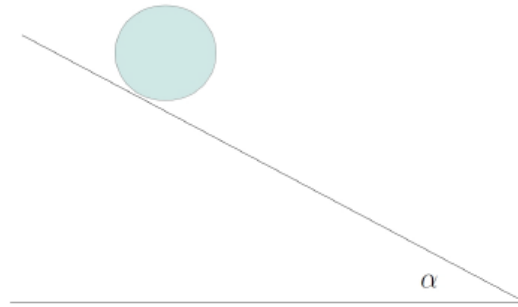
Une masse $m=5,0 \text{ kg}$ est suspendue à l'extrémité d'une corde enroulée sur une poulie de masse $m_p = 1,0 \text{ kg}$ et de rayon $R = 10 \text{ cm}$ en liaison pivot idéale autour de son axe avec un support fixe. Le moment d'inertie de la poulie par rapport à son axe vaut $J = \frac{1}{2} m_p R^2$.

- On suppose que la poulie est en rotation uniforme autour de son axe fixe (Oz) à la vitesse angulaire $\dot{\theta}$. Déterminer la vitesse de la masse m .
- Cette même poulie est maintenant retenue par un opérateur. Déterminer la force que cet opérateur doit exercer sur la poulie pour l'empêcher de tourner.
- Avec le même dispositif, l'opérateur lâche la poulie. Déterminer l'accélération angulaire du cylindre, l'accélération linéaire de la masse m et la tension de la corde.



Exercice 5 : Roue sur un plan incliné

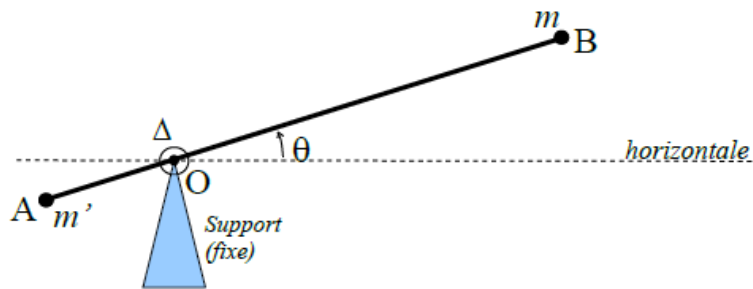
Une roue de rayon R , de masse M et de moment d'inertie par rapport à son axe $J = \frac{1}{2}MR^2$ est placée au sommet d'un plan incliné d'angle α avec l'horizontale. La roue est posée immobile. Le coefficient de frottement solide entre la roue et le sol est noté f .



1. On suppose que la roue sans glisser. Calculer la vitesse de rotation et de translation sur le plan incliné.
2. A quelle condition sur f a-t-on bien roulement sans glissement ?
3. Que se passerait-il si le coefficient de frottement solide était nul ?

Exercice 6 : balançoire asymétrique

Soit une balançoire rotative simple dont les 2 côtés n'ont pas la même longueur :

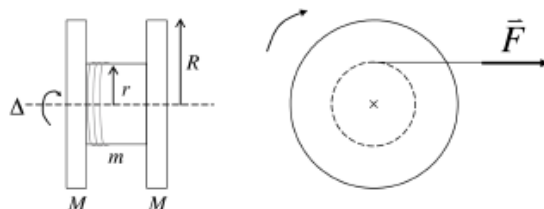


- La barre rigide AB, est de longueur $AB = 4a$ (a est une constante positive) et de masse homogène M .
 - Cette barre peut tourner autour d'un axe horizontal Δ (Δ est perpendiculaire à la figure) : $AO = a$ et $OB = 3a$ avec O le point d'intersection entre la barre et Δ . La barre AB reste donc dans le plan de la figure. On suppose que la barre tourne librement autour de Δ , c'est à dire que les forces entre l'axe Δ et la barre ne travaillent pas.
 - Soit θ l'angle de la barre par rapport à l'horizontale.
 - Une masse ponctuelle m' est placée en A et une masse ponctuelle m est placée en B.
1. **(question préliminaire)** Calculer le moment d'inertie J de la barre AB par rapport à l'axe Δ , en fonction de M et a .
Dans la suite de l'exercice on utilisera J comme une donnée.
 2. **Statique :**
 - a. Faire un bilan des forces sur le système {barre, masse m , masse m' }.
 - b. Déterminer la condition sur m' (en fonction de M , m et a) pour que la barre AB reste immobile.
 - c. Cet équilibre statique est-il atteint pour une valeur particulière de l'angle θ ? Si oui, laquelle ?
 3. **Dynamique :** On considère maintenant que $m' = m$. A l'instant initial on a $\theta = 30^\circ$ et la barre est immobile.
 - a. Calculer le moment cinétique du système {barre, masse m , masse m' } par rapport à l'axe Δ , orienté par un vecteur $\vec{u}$ (que vous indiquerez sur un schéma), en fonction de m , M , J , a , de la fonction $\theta(t)$ et/ ou de ses dérivées temporelles ($\dot{\theta}$, $\ddot{\theta}$).
 - b. D'après le théorème du moment cinétique, déterminer l'accélération angulaire $\ddot{\theta}(t)$ en fonction de m , M , J , a , g et $\theta(t)$.

- c. En déduire la vitesse angulaire $\dot{\theta}$ (t) en fonction de m, M, J, a, g et θ (t).
- d. Application : calculer (en fonction de M, m, a, J et g) la vitesse du point B lorsque la barre atteint l'horizontale ($\theta = 0$).

Exercice 7 : Déroulement d'une bobine de fil

Une bobine de fil, constituée de trois cylindres de rayons respectifs R, r et R, et de masses respectives M, m et M, est maintenue sur un axe horizontal Δ autour duquel elle peut tourner. On déroule la bobine en tirant sur une extrémité du fil avec une force $\vec{F}$ constante. Le fil, dont on négligera l'épaisseur et la masse, roule sans glisser sur la bobine.

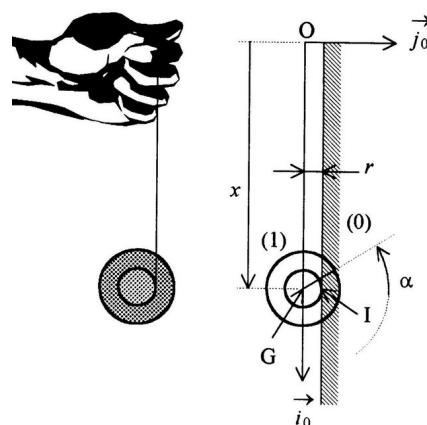


1. Rappeler l'expression du moment d'inertie, par rapport à un axe Δ , d'un objet ponctuel de masse dm situé à une distance r de cet axe. En déduire, par un calcul d'intégrale, le moment d'inertie d'un cylindre de rayon R et masse M.
2. A partir du résultat précédent, exprimer le moment d'inertie J_{Δ} de la bobine par rapport à son axe de rotation Δ , en fonction de m, M, r et R.
3. Exprimer le moment de la force $\vec{F}$ par rapport à l'axe Δ , en fonction d'un vecteur unitaire que l'on représentera clairement sur un schéma.
4. En raisonnant sur le moment cinétique de la bobine, déterminer son accélération angulaire $\dot{\omega}$, en fonction de F, r et J_{Δ} . En déduire la vitesse angulaire ω (t) de la bobine.
5. Déterminer la force F à appliquer afin de dérouler une longueur L de fil en une durée τ . On exprimera d'abord le résultat en fonction de L, τ , I et r, puis en fonction de L, τ , M, m, R et r. Que devient cette expression pour $M = m$ et $R = 2r$? Faites l'application numérique dans le cas suivant : $M = m = 100$ g, $R = 2r = 2$ cm, $L = 10$ m, et $\tau = 5$ s.

Exercice 8 : Etude d'un yoyo

Le yoyo est un jeu d'enfant composé d'un petit cylindre C de rayon r et de masse négligeable, portant à ses extrémités deux disques cylindriques de masse M et de rayon $R > r$. Les deux disques et le cylindre ont le même axe de rotation Δ . Sur le cylindre un fil de longueur l et de masse négligeable est enroulé (sans glissement et sans frottement). La portion du fil qui n'est pas enroulée reste verticale pendant tout le mouvement (pas de mouvement de balancier). Initialement, le yoyo est lâché avec une vitesse nulle.

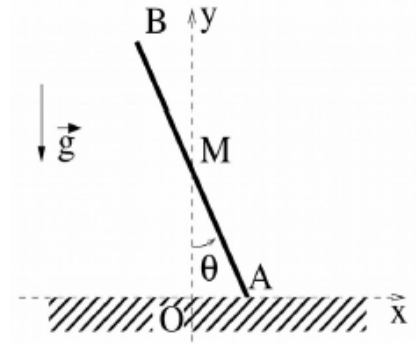
Soit α la position angulaire du yoyo par rapport à l'horizontale et x la position verticale de son centre de gravité (voir schéma).



1. Faire un bilan des forces sur le yoyo, et les représenter graphiquement.
2. Déterminer le moment d'inertie J_{Δ} du yoyo.
3. En utilisant une relation de dynamique, déterminer T en fonction de J_{Δ} , r et l'accélération angulaire $\ddot{\alpha}$.
4. Déterminer une relation entre α et x.
5. A partir d'une relation de dynamique, déterminer la loi du mouvement descendant du yoyo.
6. En déduire la vitesse maximale du yoyo.
7. Déterminer la norme de la tension du fil.

Exercice 9 : Chute d'une barre sur une patinoire

Une barre rigide AB, homogène de masse m , de longueur $2l$ et de section négligeable, est posée verticalement sur une patinoire horizontale. Le contact entre la barre et la patinoire en A est supposé sans frottement (glissement parfait). Soit θ l'angle que fait la barre par rapport à la verticale (voir figure).



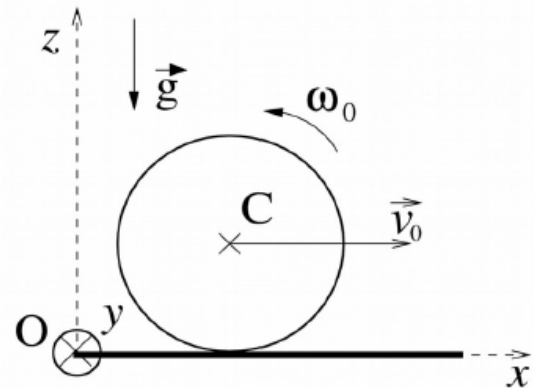
A l'instant initial, la barre est très légèrement déplacée (sans vitesse initiale) de son équilibre instable et tombe.

1. Montrer que le mouvement du milieu M de AB est vertical.
2. Déterminer l'équation différentielle du mouvement vérifiée par l'angle θ .

Donnée : Le moment d'inertie d'une barre de longueur L , homogène de masse m , par rapport à un axe perpendiculaire passant par son centre de gravité est $mL^2/12$.

Exercice 10 : Effet retro d'une boule de billard

Une boule homogène, de masse M , de centre C et de rayon R . En frappant la boule de billard sous son centre de gravité, d'un coup sec, avec la queue horizontale, la boule est lancée sur le tapis de billard horizontal dans les conditions initiales suivantes (voir figure pour les vecteurs de la base) :



- Vitesse de C : $\vec{v}_C(t=0) = v_0 \vec{u}_x$ avec $v_0 > 0$
- Vitesse angulaire de la boule autour de C : $\vec{\Omega}(t=0) = -\omega_0 \vec{u}_y$ avec $\omega_0 > 0$
- Le moment d'inertie de la boule par rapport à son axe vaut $J = \frac{2}{5}MR^2$

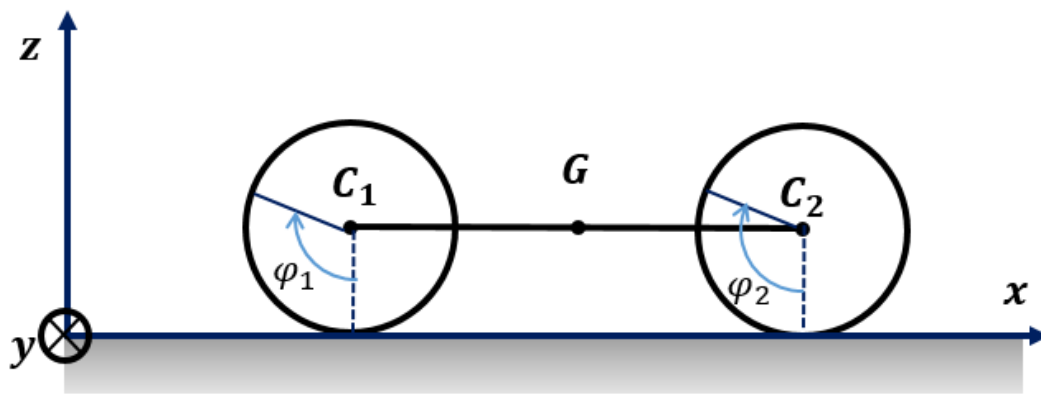
On suppose que la boule reste toujours en contact avec le tapis. Ce contact est caractérisé par un coefficient de frottement solide f (statique et dynamique).

1. Déterminer la vitesse de glissement initiale (à $t=0$).
2. Montrer que le mouvement de la boule est rectiligne.
3. Pour la première phase du mouvement, déterminer la vitesse $\vec{v}_C(t)$ du centre C de la boule et le vecteur vitesse angulaire $\vec{\Omega}(t)$ de la boule. A quel instant cette phase s'achève-t-elle ? Quelle est la distance alors parcourue par la boule ?
4. Déterminer $\vec{v}_C(t)$ et $\vec{\Omega}(t)$ pour la deuxième phase du mouvement. A quelle condition la boule revient-elle en arrière (effet rétro) ?
5. Que se passerait-il si le coefficient de frottement était nul ?

Exercice 11 : Le vélo

Un vélo se déplaçant selon $\vec{u}_x$ est modélisé par trois éléments comme tel :

- Le cadre et le cycliste de masse M sont modélisés par une barre homogène de longueur $2a$, d'extrémités C_1 et C_2 . Le centre de masse, noté G , est donc entre les deux roues, au milieu de $[C_1C_2]$. Son mouvement est paramétré par $x(t)$.
- La roue arrière de masse m , de centre C_1 , de rayon R , de moment d'inertie autour de C_1y sur laquelle le cycliste exerce un couple $\Gamma \vec{u}_y$. Son mouvement est paramétré par l'angle φ_1 dans le référentiel $\mathcal{R}^*$.
- La roue avant de masse m , de centre C_2 , de rayon R , de moment d'inertie autour de C_2y . Son mouvement est paramétré par l'angle φ_2 dans le référentiel $\mathcal{R}^*$.

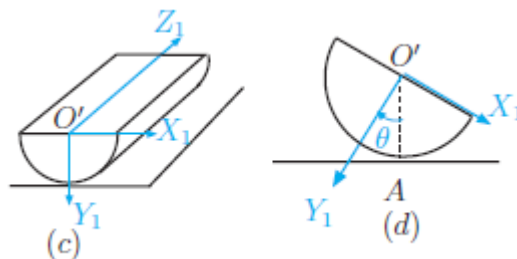


Les deux roues étant considérées comme des disques homogènes, leur moment d'inertie vaut $J = \frac{1}{2}mR^2$. Le coefficient de frottement solide entre la roue et la route est noté f . Le vélo est initialement immobile. On suppose que le roulement se fait sans glissement.

1. Déterminer la vitesse angulaire ω de la roue arrière en fonction de la vitesse du vélo en G , notée v_G . Que peut-on dire de la vitesse angulaire de la roue avant ?
2. En plus de l'action du cycliste, quelle force agit sur la roue arrière ?
3. En appliquant le PFD à l'ensemble {vélo+cycliste} puis le théorème du moment cinétique à chacune des deux roues, montrer que $\ddot{x} = \frac{\Gamma}{(M+3m)R}$
4. A quelle condition sur Γ le mouvement de la roue est-il bien sans glissement ? Commentaire.
5. Quel est le rôle des frottements solides ? Que se passerait-il si $f=0$?

Exercice 12 : Oscillation d'un demi cylindre sur un plan horizontal

Un demi-cylindre homogène de rayon R et de hauteur h est posé sur un plan horizontal comme représenté sur le schéma. On admettra que le centre de gravité du demi-cylindre est tel que $Y_1(G) = \frac{4R}{3\pi}$.



1. Déterminer le moment d'inertie de ce demi-cylindre par rapport à l'axe $O'Z_1$.
2. Lorsque le cylindre bascule, on suppose qu'il roule sans glisser sur le plan horizontal. Montrer que le mouvement du cylindre se ramène à une rotation pure autour d'un axe Δ passant par A et perpendiculaire au plan du schéma. Déterminer le moment d'inertie J_Δ du demi-cylindre par rapport à cet axe.
3. En appliquant un théorème de dynamique adéquat, déterminer l'équation du mouvement.
4. En déduire la période des oscillations de faible amplitude du demi-cylindre autour de sa position d'équilibre stable.