

Exercice n°0

Soient P et Q deux assertions, montrer à l'aide d'une table de vérité que :

$$[P \Rightarrow Q] \Leftrightarrow [(Non\ Q) \Rightarrow (Non\ P)]$$

$$[P \Leftrightarrow Q] \Leftrightarrow [(Non\ P) \Leftrightarrow (Non\ Q)]$$

$$[P \Leftrightarrow Q] \Leftrightarrow [P \Rightarrow Q \text{ ET } Q \Rightarrow P]$$

Exercice n°1

Soit a, b, c et d quatre réels tels que : $a \neq b$, montrer qu'il existe une unique fonction affine f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, telle que $f(a) = c$ et $f(b) = d$

Exercice n°2

Soient a et b deux réels, non nuls simultanément, et $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto ax^2 + b$, montrer que si la fonction f s'annule alors les réels a et b vérifient : $ab \leq 0$

Exercice n°3

Soit n un entier relatif, montrer que $\frac{n^2+n}{2}$ est un entier.

Exercice n°4

Montrer que toute fonction de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$ peut se décomposer en somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.

Exercice n°5

Soit f une fonction de I (désignant un intervalle de $\mathbb{R}$) sur $\mathbb{R}$,

Soit la proposition : $\forall x \in I, \forall y \in I, f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$

- 1) Ecrire la réciproque de cette implication
- 2) Ecrire la négation de cette implication
- 3) Ecrire la contraposée de cette implication.
- 4) Ecrire la contraposée de la réciproque de cette implication

Exercice n°6

Pour $E = \{1,2,3,4,5\}$

Dire si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses :

- 1) $\forall x \in E, \exists y \in E, x \leq y$
- 2) $\exists y \in E, \forall x \in E, x \leq y$
- 3) $\forall x \in E, \exists y \in E, x < y$
- 4) $\forall x \in E, \forall y \in E, x \leq y$

Exercice n°7

Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$:

- 1) Soit M un réel, écrire une assertion exprimant le fait que f est majorée par M .
- 2) Ecrire une assertion exprimant que f est majorée
- 3) Ecrire une assertion exprimant que f n'est pas majorée.

Exercice n°8

Montrer que tout entier naturel supérieur ou égal à 2, est un produit de nombres premiers.

Exercice n°9

Soit f une fonction de I (*désignant un intervalle de $\mathbb{R}$*) sur $\mathbb{R}$, traduire par une phrase :

- 1) $\forall x \in I, f(x) \neq 0$
- 2) $\forall x \in I, f(x) = 0 \Rightarrow x = 0$
- 3) $\forall x \in I, \forall y \in I, f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$

Exercice n°10

Résoudre dans $\mathbb{R}$, $|x+1| = 4 - |3x-2|$

Exercice n°11

Montrer que l'ensemble des nombres premiers est infini.

Exercice n°12

Soit E un ensemble, F désigne un deuxième ensemble, montrer que : $E \subset F \Leftrightarrow \mathcal{P}(E) \subset \mathcal{P}(F)$ où $\mathcal{P}(E)$ désigne l'ensemble des parties de E .

Exercice n°13

Démontrer que $\sqrt{2}$ est un nombre irrationnel.

Exercice n°14

Déterminer toutes les applications f de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$ telle que : $\forall m, n \in \mathbb{N}, f(m+n) = f(m) + f(n)$

Exercice n°15

Déterminer toutes les applications f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, telles que $\forall x, y \in \mathbb{R}, f(x)f(y) = f(xy) + x+y$

Exercice n°16

Soit n un entier non nul, démontrer que :

- 1) $1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
- 2) $1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

Exercice n°17

- 1) Soit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 2$ et $u_1 = 3$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n$, montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 2^n + 1$
- 2) Pourquoi parle-t-on ici d'une récurrence double ? S'agit-il d'une récurrence forte ?

Exercice n°18

Soient E et F deux ensembles

- 1) Montrer que $F \subset E \Leftrightarrow E \cap F = F$
- 2) Montrer que $F \subset E \Leftrightarrow E \cup F = E$

Exercice n°19

Soient A, B et C trois parties d'un ensemble E alors :

- 1) Démontrer que : $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
- 2) Démontrer que : $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
- 3) Démontrer enfin : $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$ et $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$ (appelées lois de Morgan)

Exercice n°20

Soient A et B deux parties d'un ensemble, on définit l'opérateur ensembliste Δ par $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$

Montrer que $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$