Chapitre 5 : Les complexes (2)

I. Formules d'Euler, de Moivre, linéarisation

1) Formule d'Euler

Pour $\theta \in \mathbb{R}$, on a $\cos\theta = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$ et $\sin\theta = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$

2) Application : linéariser des puissances

Pour $\theta \in \mathbb{R}$, en développant avec la formule du binôme de Newton

$\cos^n\theta = (\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2})^n$ ou $\sin^n\theta = (\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i})^n$, et en regroupant les termes 2 à 2, on obtient une expression de $\cos^n\theta$ *en fonction* des $\cos(k\theta)$ *ou des* $\sin(k\theta)$ *pour* $0 \leq k \leq n$

On dit qu'on a linéarisé l'expression.

Exercice : Linéariser $\cos^3(\theta)$ et $\sin^3(\theta)$

On a $\cos^3\theta = (\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2})^3 = \frac{1}{2^3}\sum_{k=0}^{3}\binom{3}{k}e^{ik\theta}e^{i(3-k)\theta}$

$\cos^3\theta = \frac{1}{8}(e^{3i\theta} + 3e^{2i\theta}e^{-i\theta} + 3e^{i\theta}e^{-2i\theta} + e^{-3i\theta})$ (il est conseillé d'utiliser le triangle de Pascal…)

$\cos^3\theta = \frac{1}{4}(\frac{e^{3i\theta}+e^{-3i\theta}}{2} + 3\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}) = \frac{1}{4}(\cos(3\theta) + 3\cos(\theta))$

De même: $\sin^3\theta = (\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i})^3 = \frac{1}{(2i)^3}\sum_{k=0}^{3}\binom{3}{k}e^{ik\theta}(-1)^k e^{i(3-k)\theta}$

$\sin^3\theta = \frac{-1}{8i}(e^{3i\theta} - 3e^{2i\theta}e^{-i\theta} + 3e^{i\theta}e^{-2i\theta} - e^{-3i\theta})) = \frac{-1}{4}(\frac{e^{3i\theta}-e^{-3i\theta}}{2i} - 3\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i})$

Soit: $\sin^3\theta = \frac{-1}{4}(\sin(3\theta) - 3\sin(\theta))$

3) Techniques « annexes »

Pour linéariser $\cos^n(\theta)\sin^m(\theta)$ on remplace $\cos(\theta)$ par $\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$ et $\sin(\theta) = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$

Et on développe…

Technique de l'arc-moitié

On peut factoriser une expression du type $e^{i\theta_1} + e^{i\theta_2}$ par $e^{i\frac{\theta_1+\theta_2}{2}}$

Ex : Soient p et q deux nombres réels, factoriser $e^{ip} + e^{iq}$

On a : $e^{ip} + e^{iq} = e^{i\frac{p+q}{2}}(e^{i\frac{p-q}{2}} + e^{i\frac{-p+q}{2}}) = 2e^{i\frac{p+q}{2}}\cos(\frac{p-q}{2})$

4) Formule de Moivre

Pour $\theta \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{Z}$, on a $\left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta}$

Ainsi : $(\cos(\theta)+i\sin(\theta))^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$

Démonstration : Par récurrence, et passage à l'inverse pour n négatif

Exercice : Calculer $(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2})^{3000}$

On a : $(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2})^{3000}=(e^{\frac{i\pi}{3}})^{3000}=e^{1000i\pi}=(-1)^{1000}=1$

5) Application de la formule de Moivre : Exprimer cos(n θ *) ou sin(n* θ) *en fonction de cos*(θ) *ou sin*(θ *)*

Ex : Exprimer cos(3 θ*), sin(3* θ) *en fonction de cos³*(θ)*, sin³*(θ)*, cos*(θ) *et sin*(θ)

On a : cos(3 θ*)* $=\frac{e^{3i\theta}+e^{-3i\theta}}{2}=\frac{(e^{i\theta})^3+(e^{-i\theta})^3}{2}=\frac{(\cos(\theta)+isin(\theta))^3+(\cos(\theta)-isin(\theta))^3}{2}$

II. Racines de l'unité

1) Définition

Si z désigne un nombre complexe, on appelle **racine n-ième** de z tout complexe Z tel que $Z^n = z$

Les racines n-ièmes de1 sont également appelées racines n-ièmes de l'unité.

Notation : L'ensemble des racines n-ièmes de l'unité est noté : U_n

2) Proposition :

Il existe exactement n racines n-ièmes de l'unité qui sont les complexes : $w_k = e^{\frac{2ik\pi}{n}}$ avec k$\in [\![0, n-1]\!]$

Démonstration

Clairement les solutions sont de module 1.

Clairement l'ensemble des racines n-ièmes de 1 sont de la forme $\{e^{\frac{2ik\pi}{n}}, n\in\mathbb{Z}\}$ *(il suffit de revenir à l'écriture exponentielle)*

Mais est-ce que : $\{e^{\frac{2ik\pi}{n}}, n\in\mathbb{Z}\}=w_k=e^{\frac{2ik\pi}{n}}$ *avec* $k\in [\![0, n-1]\!]$ *?*

Posons $q=E(\frac{k}{n})$ *et r = k-nq*

On a par définition : $q\leq \frac{k}{n}\leq q+1$

Et 0$\leq r<n$, $e^{\frac{2ir\pi+2qni\pi}{n}}=e^{\frac{2ir\pi}{n}}$ *d'où* $\{e^{\frac{2ik\pi}{n}}, n\in\mathbb{Z}\}=w_k=e^{\frac{2ik\pi}{n}}$ *avec* $k\in [\![0, n-1]\!]$

Et enfin, est ce que deux racines pour deux valeurs de k différentes dans $[\![0, n-1]\!]$ *sont bien distinctes ?*

On a : $e^{\frac{2ik\pi}{n}}=e^{\frac{2ir\pi}{n}}\Leftrightarrow \frac{2k\pi}{n}=\frac{2r\pi}{n}[2\pi]$ *donc il existe un entier q tel que :*

$\frac{2k\pi}{n}=\frac{2r\pi}{n}+2q\pi$ *et : k-r = nq, or k et r sont dans* $[\![0, n-1]\!]$, donc k-r = 0…

3) Proposition
Soit n un entier supérieur ou égal à 2
Si w est une racine n-ième de l'unité différente de 1,
Alors : $1+w+\ldots+w^{n-1}=0$

La somme des racines n-ièmes de l'unité est égale à 0.

Démonstration : Il s'agit de la somme des termes d'une suite géométrique…

4) Proposition
Soit z un complexe, si Z_0 est une racine n-ième de z, alors l'ensemble des racines n-ièmes de z est : $\{Z_0 w \ / \ w \in U_n\}$

Démonstration : Pour z = 0, c'est évident !

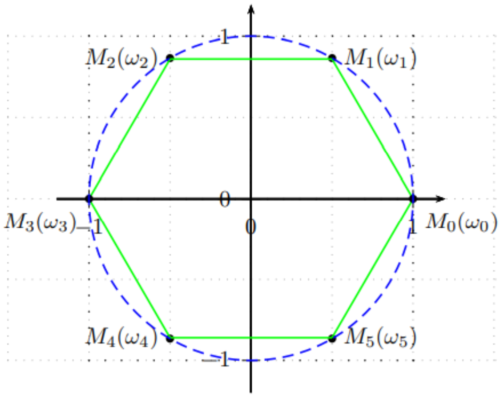
Sinon : l'équation $Z^n = z$ s'écrit aussi : $Z^n = Z_0^n$, comme $Z_0 \neq 0$, l'équation est équivalente à : $(\frac{Z}{Z_0})^n = 1$, et $\frac{Z}{Z_0} = w_k$

5) Corollaire
Soit un entier naturel n différent de 0, et un complexe z différent de 0 de module r et d'argument θ
Le complexe z admet n racines n-ièmes qui sont les complexes :
$Z_k = r^{\frac{1}{n}} e^{i\frac{(\theta+2k\pi)}{n}}$ avec $k \in [\![0; n-1]\!]$

Démonstration : On applique la propriété précédente avec $Z_0 = r^{\frac{1}{n}} e^{i\frac{(\theta+\pi)}{n}}$

6) Interprétation géométrique des racines n-ièmes de l'unité

Les images des racines n-ièmes de l'unité sont disposées régulièrement sur le cercle trigonométrique (sur la figure, $n = 6$). Elles sont les sommets d'un polygone régulier à n côtés.



$\mathbb{U}_6 = \{e^{i\frac{0\pi}{6}}, e^{i\frac{2\pi}{6}}, e^{i\frac{4\pi}{6}}, e^{i\frac{6\pi}{6}}, e^{i\frac{8\pi}{6}}, e^{i\frac{10\pi}{6}}\} = \{1, e^{i\frac{\pi}{3}}, j, -1, j^2, e^{i\frac{5\pi}{3}}\}$.